David Block Sevilla, Lilia Antonio Pérez** y Laura Resendiz Zamudio****

Una experiencia de formación docente sobre la enseñanza de la división en la primaria

Resumen

Se presenta una experiencia de trabajo conjunto entre docentes de educación básica e investigadores, cuyo principal propósito fue enriquecer los conocimientos didácticos para la enseñanza de la división de números naturales. Se estableció un diálogo a través de sesiones semanales virtuales, en el que las maestras relataron episodios vividos en sus clases con sus alumnos, y los investigadores aportaron comentarios sobre estos, al tiempo que propusieron alternativas didácticas para abordar los contenidos. El análisis de las sesiones revela un proceso de apropiación bastante nítido de un enfoque didáctico para la enseñanza por parte de las docentes, lo cual contribuye a destacar el potencial de este tipo de dispositivos para la formación docente.

Palabras Clave

Formación docente • enseñanza de la división • escuela primaria • trabajo colaborativo

* Doctor en Ciencias con Especialidad en Investigaciones Educativas (DIE-Cinvestav). Ha desarrollado su trabajo sobre enseñanza de las matemáticas en tres vertientes: la investigación en didáctica en el nivel básico, el desarrollo curricular y la formación de docentes. Correo electrónico: davidblock54@gmail.com. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-3914-5544.

** Doctora en Ciencias con Especialidad en Investigaciones Educativas (DIE-Cinvestav). Especialista en formación docente, ha diseñado programas de posgrado en educación y es coautora de materiales para docentes en educación básica. Filiación: Instituto Superior de Ciencias de la Educación. División Académica de Nextlalpan. Correo electrónico: lilia.antonio@isceem.edu.mx. Orcid: https://orcid.org/0000-0001-5307-0801.

*** Magíster en Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas (Universidad de Huelva). Ha colaborado en diferentes proyectos de investigación sobre enseñanza de las matemáticas en escuela primaria. Filiación: Departamento de Investigaciones Educativas del Cinvestav. Correo electrónico: lresendi@cinvestav.mx

A teacher training experience on teaching division in primary school

Abstract

This paper presents a collaborative work experience between elementary school teachers and researchers, whose main purpose was to enrich the participants' pedagogical knowledge for teaching arithmetic. A dialogue was established through weekly virtual sessions, in which teachers recounted experiences from their classrooms with their students, and researchers provided feedback on these experiences, while also proposing alternative teaching methods for addressing the content. Analysis of the sessions reveals a clear process of appropriation of a pedagogical approach by the teachers, highlighting the potential of this type of initiative for teacher training.

Keywords

Teacher training • division instruction • primary school • collaborative work

1. Introducción

El texto que presentamos a continuación da cuenta de una experiencia de trabajo colaborativo entre maestras e investigadores sobre la enseñanza de la aritmética en la escuela primaria, a través de reuniones virtuales. La experiencia no se desarrolló de entrada como un proyecto de investigación, sino como una experiencia de acompañamiento, en la que, semana a semana, las docentes aportaban relatos sobre el desarrollo de sus clases, y los investigadores hacíamos comentarios y proponíamos alternativas. Muy pronto, se fue generando un conjunto de hechos relacionados con la enseñanza de la aritmética, con la práctica docente y con la colaboración misma de docentes e investigadores, que nos pareció que valía la pena analizar y comunicar.

En el presente artículo nos centramos en el caso de la división de números naturales. Después de presentar los propósitos y los referentes teóricos que orientaron el trabajo, analizamos algunos episodios que dan cuenta de las problemáticas planteadas por las docentes, las sugerencias de los investigadores, las transformaciones

que las docentes fueron dejando ver en sus prácticas de enseñanza de la aritmética y las dificultades que emergieron. Al final, hacemos un comentario sobre las características de esta experiencia en tanto dispositivo de formación, y en tanto proyecto colaborativo entre investigadores y docentes.

2. Propósitos

Los propósitos de la experiencia fueron tres: propiciar un enriquecimiento de la práctica de la enseñanza de la aritmética a través del trabajo conjunto entre investigadores y docentes; avanzar en el conocimiento sobre las prácticas de enseñanza de las matemáticas y, en particular, sobre los procesos de apropiación de alternativas didácticas por parte de docentes; y aportar conocimiento sobre el desarrollo de un dispositivo de formación.

3. Referentes teóricos

Dos dimensiones que cruzan el presente trabajo son: la formación docente –desarrollamos un *dispositivo de formación* en el marco de un proyecto colaborativo entre docentes e investigadores–, y el conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas –nos referiremos a la categoría de conocimiento pedagógico del contenido y a la didáctica de las matemáticas con orientación constructivista–.

3.1. Un proyecto colaborativo

Nos interesó compartir aportes de la investigación en didáctica de las matemáticas con las docentes, al tiempo que conocer con mayor profundidad sus prácticas de enseñanza y las posibilidades de mejora de estas. Hoy en día es bien sabido que no hay un camino directo y simple que traduzca dichos aportes en beneficios en el aula (Ávila, 1996; Block Sevilla *et al.*, 2007; Carvajal, 2004). Existen numerosos

trabajos que documentan el hecho de que las situaciones didácticas producto de la investigación difícilmente son implementadas en los salones de clase de las escuelas con sus sentidos originales (Artigue, 2011; Block Sevilla *et al.*, 2007; Robert, 2001). Los docentes necesitan transformar las propuestas didácticas para poderlas implementar: las seleccionan, las interpretan, las adaptan y eventualmente crean otras, desde su propia perspectiva acerca de cómo se aprende, esto es, *se apropian* de ellas (Espinosa, 2007; Mercado, 2002; Rockwell y Mercado, 1988). En estos procesos intervienen también, entre otros factores, las necesidades que los docentes identifican en sus alumnos, así como las restricciones o exigencias institucionales que posibilitan y, a la vez, limitan su labor, por ejemplo, el tiempo disponible (Rockwell, 2013).

Los proyectos colaborativos entre docentes e investigadores constituyen una de las formas de superar la distancia entre la investigación y la práctica: para los docentes, pueden llegar a ser un medio para reflexionar sobre su práctica y enriquecer su acervo de herramientas, teóricas y prácticas, de enseñanza; para los investigadores, pueden ser un medio de conocimiento de las condiciones reales de la práctica docente; y para ambos, dichos proyectos abren la posibilidad de generar juntos secuencias didácticas que incorporen aportes de la investigación, pero que a la vez sean factibles de realizarse en las escuelas. Estas metas dan pie a una estrecha relación entre la teoría y la práctica (Desgagné *et al.*, 2001; Sensevy *et al.*, 2013). En las diversas modalidades de la investigación colaborativa varía el peso que se otorga a cada uno de sus dos propósitos: el desarrollo profesional y la producción de saberes científicos (Roditi y Trgalová, 2016; Scavino *et al.*, 2025). En la experiencia que aquí reseñamos, el peso estuvo del lado del desarrollo profesional.

3.2. Desarrollo de un dispositivo de formación

El concepto de *dispositivo de formación* nos resulta útil para describir analíticamente el diálogo que se fue construyendo en la experiencia entre investigadores y maestras de una primaria de la Ciudad de México en torno a la enseñanza de la aritmética. Retomando los aportes de Yurén *et al.* (2005), un dispositivo de formación docente

se puede definir como el conjunto de interrelaciones que guardan entre sí diversos elementos heterogéneos (sujetos, acciones, situaciones didácticas, libros de texto, recursos tecnológicos, entre otros) que, puestos en movimiento, contribuyen a propiciar un proceso formativo de docentes; en este caso, para enriquecer algunas de las concepciones que las maestras tenían respecto de la enseñanza de la aritmética. Recuperamos sobre todo dos características que se atribuyen a la noción de dispositivo (Souto, 2019): la no linealidad del plan de trabajo, el cual se va armando sobre la marcha en la misma medida en que se va negociando y precisando cierto propósito común, así como la intención de tomar en consideración factores de distinta índole que intervienen en la acción formadora (los aportes de la didáctica, pero también los procesos de los docentes, sus prácticas usuales, las restricciones institucionales, entre otras). Más adelante damos cuenta del proceso de construcción de este dispositivo de formación y de los rasgos que lo caracterizaron.

3.3. El conocimiento pedagógico del contenido

Para enseñar una disciplina determinada, además de poner en juego capacidades generales para la enseñanza, los docentes requieren de conocimientos sobre esa disciplina y sobre su didáctica, lo que se ha llamado "conocimiento pedagógico del contenido" (Ball *et al.*, 2008; Carrillo-Yañez *et al.*, 2018; Shulman, 1986). Este conocimiento tiene un componente epistemológico sobre la naturaleza del contenido, y un componente pedagógico, que incluye aspectos cognitivos sobre el aprendizaje de la noción (operaciones implícitas, dificultades, errores frecuentes de los alumnos), aspectos curriculares y aspectos didácticos (incluyendo alternativas para enseñarlo). Algunos investigadores destacan, además, dentro del conjunto de conocimientos especializados del profesor, lo que llaman el conocimiento interpretativo (Gibim *et al.*, 2025; Ribeiro, 2024), el cual se manifiesta en las formas en que el profesor interpreta las producciones de los alumnos. En el dispositivo de formación que reportamos en este texto, un propósito central fue propiciar un enriquecimiento del conocimiento pedagógico de la aritmética de un grupo de profesoras, incluyendo al conocimiento interpretativo de las resoluciones por sus estudiantes a las actividades planteadas.

3.4. El enfoque didáctico constructivista

En nuestros trabajos de investigación y de desarrollo en el campo de la didáctica de las matemáticas, nos hemos situado en una perspectiva de corte constructivista. Tres consideraciones fundamentales de esta perspectiva son:

- Los conocimientos matemáticos básicos cobran sentido, en gran medida, en tanto herramientas para resolver determinado tipo de problemas. De ahí la decisión de analizar las nociones matemáticas desde el punto de vista de los problemas en los que intervienen.
- Los procedimientos precarios, a veces erróneos, que despliegan los aprendices al enfrentar los problemas matemáticos juegan un papel importante en la construcción de sus conocimientos.
- Un conocimiento matemático puede adquirir distintos significados, dependiendo de la situación en la que funcione. La suma, por ejemplo, puede significar agregar, pero también juntar; la resta puede significar quitar, pero también "ver cuánto falta para...", etc. La riqueza de significados de un conocimiento para los alumnos depende de la diversidad de problemas concretos que resuelven con ese conocimiento.

  Nuestro trabajo de investigación ha consistido principalmente en el estudio de situaciones didácticas para la enseñanza de esta disciplina en la escuela básica, bajo esta perspectiva constructivista, desde la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998 y 2000). En la presente experiencia de colaboración, las sugerencias y propuestas de los investigadores a las docentes se han basado en buena medida en conocimientos de didáctica de las matemáticas desarrollados bajo este enfoque.

3.5. Los participantes, el dispositivo y aspectos de metodología

A continuación, presentamos algunas características del perfil de los participantes, así como la dinámica de trabajo que se estableció entre docentes e investigadores.

¿Quiénes son los investigadores y las docentes que participaron en esta experiencia?

Tres investigadores interesados en desarrollar trabajo colaborativo con docentes convergieron en esta experiencia: dos investigadores en didáctica de las matemáticas –D(I), y L(I)–, adscritos a un departamento de educación de un centro de investigaciones, y una docente investigadora sobre procesos de formación docente –Li(I)–, adscrita a un instituto que ofrece programas de posgrado para profesores de educación básica y media superior. A través de esta última, se hizo contacto con las docentes de una escuela primaria pública de la Ciudad de México.

Con respecto a las docentes, se trata de un grupo de jóvenes maestras, de entre 30 y 35 años de edad, y con 6 a 12 años de servicio, de una escuela primaria de tiempo completo que se ubica en la Alcaldía de Iztapalapa. Esta escuela se ha destacado por las distintas iniciativas que los docentes han tenido con los alumnos, con el respaldo del director. Por ejemplo, durante el resguardo en casa por la pandemia de Covid-19, los docentes se organizaron para desarrollar unidades didácticas que favorecieran que todos los alumnos del plantel trabajaran con un mismo tema, a fin de facilitar la labor de los padres de familia en casa. Así, las docentes participantes en esta experiencia formativa contaban ya con un camino andado de trabajo colectivo para la construcción de iniciativas de trabajo con sus alumnos.

Negociación del propósito

En un inicio, los investigadores comentaron a Li(I) su interés por conocer lo que las maestras hacían para enseñar matemáticas con el nuevo plan y programas de estudio 2022, en el marco de la Nueva Escuela Mexican (NEM).[1] Por su parte las

1. En los nuevos programas de la NEM se eliminó la separación entre disciplinas, incluyendo la de matemáticas, en un intento por integrarlas en el desarrollo de proyectos. Una consecuencia fue que las matemáticas a enseñar en primaria quedaron dispersas, reducidas a escasos contenidos aislados que debían aplicarse en determinados proyectos específicos (Block, 2023).

docentes manifestaron a Li(I) su interés por un curso que las orientaría sobre cómo enseñar matemáticas, justamente debido al escasa presencia de contenidos de esta materia en los nuevos libros de texto derivada de la NEM. Los investigadores aceptamos entonces dejar de lado nuestro interés inicial y propusimos realizar un proceso de acompañamiento en el que las docentes propondrían los contenidos a trabajar en función de sus necesidades. Por lo que algunas relataron después, esta propuesta también les resultó desconcertante, ya que ellas esperaban asistir a un curso de enseñanza de las matemáticas previamente diseñado, con propósitos y contenidos ya definidos. No obstante, aceptaron el acompañamiento, el cual se fue definiendo poco a poco.

La idea inicial de este colectivo era que participara al menos una docente de cada grado de primaria, a fin de seguir fortaleciendo el trabajo realizado en la escuela. A la primera sesión acudieron seis docentes, sin embargo, la asistencia a las siguientes sesiones fue irregular, debido a los desencuentros iniciales ya mencionados, y posiblemente también a las dificultades para conectarse con la continuidad que se acordó (sesiones semanales).

Con el transcurrir de los meses este espacio de diálogo se fue consolidando con la participación continua de tres docentes de esta escuela: María y Rosa de 3º y Nora de 5º. Sobre la marcha, por iniciativa de Li(I), se unieron dos docentes más procedentes de dos escuelas del Estado de Veracruz: Alma de 4º de primaria y Araceli de preescolar, pero ellas mantuvieron una participación irregular.

¿Cómo trabajamos? El dispositivo de formación

Los espacios de diálogo entre docentes e investigadores fueron a distancia y se realizaron en una plataforma digital. Esta decisión fue para acortar distancia y evitar tiempos de traslado desde el centro de investigación, y desde los domicilios de las docentes a la escuela. Esto tuvo la ventaja, además, de permitir la incorporación de las dos docentes del Estado de Veracruz. Las sesiones fueron semanales, a las seis de la tarde, con una duración de entre hora y media y dos horas en función del número de experiencias que compartían las docentes. Durante toda la

experiencia, se realizaron 34 sesiones, en un período de poco más de un año, de septiembre de 2023 a diciembre de 2024.

El primer tema que las docentes propusieron fue el algoritmo de la resta. Los investigadores propusimos entonces la posibilidad de trabajar primero sobre cálculo mental reflexivo[2] en suma y resta por considerar que, de esa manera, las docentes tendrían una mirada más amplia sobre los procedimientos para resolver las operaciones de suma y resta. Las docentes estuvieron de acuerdo y así lo hicimos. Después de algunas sesiones acordamos un itinerario posible para continuar con otros temas: la multiplicación, la división, las fracciones y los decimales.

La dinámica de trabajo que se acabó estableciendo para cada una de las sesiones fue: en la primera parte, las docentes que así lo deseaban relataban alguna experiencia ocurrida en la semana con su grupo, ya fuera a raíz de una actividad propuesta por ellas, o bien de alguna de las propuestas de los investigadores. A continuación de estos relatos, los demás, docentes e investigadores, hacíamos comentarios. Para ello, con frecuencia los investigadores pedíamos información adicional sobre las tareas planteadas y sobre las resoluciones de los alumnos. Poco a poco los relatos se hicieron más precisos, incluyendo fotografías, audios o incluso videos de procedimientos de los alumnos. Así también el clima de confianza entre docentes e investigadores se fue acrecentando con la continuidad del diálogo entre ambos.

La parte dedicada a comentar los relatos de las docentes tendió a abarcar más de la mitad de cada sesión, a veces casi toda. En una segunda parte, los investigadores presentábamos un análisis de algún aspecto de la noción que se estuviera estudiando (suma, resta, multiplicación, división, fracciones y decimales). Dicho análisis incluía ideas sobre posibles itinerarios a seguir (aspectos de la noción que se podrían ir abordando a lo largo de varias sesiones) y sobre situaciones didácticas. Las docentes eran quienes decidían qué retomar de estas ideas y

2. Nos referimos a un tipo de cálculo mental que admite apoyo en la escritura, el cual se realiza mediante procedimientos distintos a los algoritmos establecidos, procedimientos flexibles pues dependen de los datos que están en juego, basados en propiedades del sistema de numeración y de las operaciones (Parra y Saiz, 2007).

cómo. Además, les facilitamos algunos documentos por vía electrónica: libros texto de matemáticas para primaria que consideramos de buena calidad, y capítulos de libros dirigidos a docentes. Observamos que varias veces las maestras implementaron en sus clases situaciones que encontraron en estos documentos y también compararon los procedimientos de sus alumnos con los reportados en alguno de los materiales.

Recopilación de la información

La documentación de la experiencia fue posible gracias a la toma de notas y, a partir de la cuarta sesión, a las videograbaciones de las reuniones virtuales que se realizaron con las maestras. Esta documentación se enriqueció con las grabaciones en audio y en video de algunas de las actividades que las docentes realizaban con sus alumnos, así como de fotografías de los trabajos que las niñas y los niños generaban en sus clases. Lo anterior nos dio la posibilidad de hacer un análisis de lo ocurrido, tanto en la vertiente de la didáctica de las matemáticas como en la relativa a la formación de docentes en educación básica.

4. Análisis de la experiencia

En el presente artículo nos centraremos en el tema de la división, el cual se trabajó a lo largo de ocho sesiones, más o menos a la mitad del lapso que duró la experiencia (del 3 de abril al 13 de junio), momento en el que ya se había instalado cierto nivel de confianza y una dinámica de trabajo con las docentes. Presentaremos algunos indicios de modificaciones de las prácticas de enseñanza de las docentes. Prestaremos atención sobre todo a las dimensiones epistémica (¿cómo se concibe la noción?) y didáctica (¿cómo se considera que debe enseñarse?) que subyacen a estas modificaciones. Dado que no hicimos observaciones en el aula, (ni previas ni posteriores a la experiencia), los indicios de modificaciones que identificamos se basan principalmente en los relatos de las docentes sobre las actividades que plantearon en clase,

sobre las expectativas que tenían al ponerlas y, sobre todo, en sus descripciones acerca de los procedimientos de resolución de sus alumnos. Consideraremos también ciertas diferencias entre las mismas docentes que participaron en relación con los aprendizajes mencionados, así como la manifestación de las dificultades que expresaron al intentar hacer ciertos cambios, y también de prácticas que permanecen.

4.1. Descubrimiento de los procedimientos alternativos para dividir y de la posibilidad de que los alumnos los pongan en juego de manera autónoma

A lo largo de los primeros meses de la experiencia, las docentes dejaron ver, en sus participaciones, unas de manera más clara que otras, ciertos cambios en sus concepciones acerca de lo que es una operación aritmética, la cual pasó de reducirse casi exclusivamente al algoritmo usual a considerar cierta diversidad de procedimientos que se pueden poner en juego para resolver la operación. Este cambio vino de la mano de otro: los alumnos pueden desarrollar por sí mismos procedimientos informales, valiosos en el proceso de aprendizaje, antes de recibir una enseñanza explícita de los procedimientos convencionales, al intentar resolver problemas con ciertas condiciones (Brousseau, 1998 y 2000). Una de estas condiciones tiene que ver con las características de los problemas iniciales que se plantean, los cuales deben implicar al conocimiento que es objeto de la enseñanza, por ejemplo, que se requiera de una división para resolverlo, pero al mismo tiempo, deben poder ser abordados sin disponer aún explícitamente de este, poniendo en juego los conocimientos previos (en el caso de la división, los problemas podrían abordarse repartiendo, sumando, restando o multiplicando). Otra condición es que el docente instale un *contrato didáctico* (Brousseau, 1998) en el que los alumnos sepan que lo que se espera de ellos no es que apliquen un procedimiento enseñado –determinada operación, por ejemplo–, sino que desarrollen uno propio. Estas condiciones se fueron explicitando a lo largo de las sesiones, cuando los investigadores comentaban las experiencias narradas por las docentes. A continuación, damos ejemplos de estos procesos.

El inicio: las docentes exploran con sus alumnos problemas de división

En la sesión 15, la última dedicada al tema de la multiplicación, Nora (5º) relató, con entusiasmo, una primera experiencia sobre la división. Uno de los problemas que comentó implicaba el uso de una tabla de variación, formato al que recurrió en las semanas previas durante el trabajo con la multiplicación. Se trató de la relación entre número de lapiceros y su precio (Figura 1).

Figura 1. Tabla de variación propuesta por la docente Nora a sus alumnos

Lapicero	2		5	
Precio $	5	10		20

La maestra expuso algunos de los procedimientos de sus alumnos. El primero fue un procedimiento erróneo al que ella le encontró cierta lógica: el alumno identificó una posible regularidad en los valores de la segunda fila, los números podrían ir de 5 en 5, y, con base en esta, propuso la respuesta de 15 pesos para 5 lapiceros, formando así la sucesión 5, 10, 15, 20. Otros tres procedimientos que narró, esta vez correctos, fueron: 1) *la conservación de las razones internas*, si por 5 pesos se dan 2 lapiceros, por 10 pesos, que es el doble, se deben dar 4 lapiceros; 2) *el del valor unitario*, un lapicero cuesta $ 2,50, con este dato se obtienen los otros costos; y 3) *la conservación de la suma*,[3] si por 4 son 10, y por 1 son 2,50, por 4 + 1 son 10 + 2.50. La maestra expresó acerca del episodio lo siguiente: "[sucede] lo que nos dicen en los libros [...] hoy veo que ellos [los alumnos] logran como reflexionar y lo logran externar [...] ¡eso me gustó mucho!".

En la misma sesión, María (3º) relató a sus colegas y a los investigadores que encontró los problemas de multiplicación y de división de los que Nora habló

3. La maestra no los nombra de esta manera.

anteriormente,[4] pero que solamente resolvieron los de multiplicación porque no había empezado a enseñar la división. Uno de esos problemas era:

> Un edificio tiene 12 pisos con 5 departamentos cada uno. El consorcio del edificio decidió cambiar la cerradura de la puerta de entrada y encargó 120 llaves nuevas. ¿Cuántas llaves se puede entregar por departamento para que todos tengan la misma cantidad?

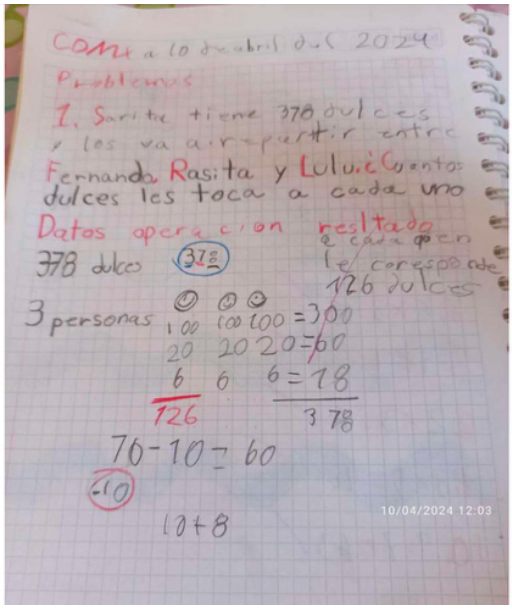
D(I) sugirió a todas que trataran de imaginar qué podrían hacer los alumnos de María (3º) si se les propusiera el problema. Después de unos segundos de silencio, Nora dijo que se podría dar una llave a cada departamento y, al ver que quedan 60, dar otra más. María, por su parte, aceptó que "así razonando, está bien, pero ya con la operación, pues no". Este tipo de consideraciones nos llevó más adelante a hablar de la posibilidad, y de la importancia, de poner en juego conocimientos de manera implícita, en este caso, de la división.

En la sesión siguiente (sesión 16) María (3º) relató que "se quedó con la espinita" y puso a sus alumnos un problema de reparto "no tanto como la operación, sino repartir", con lo cual parece querer decir que no pidió que se usara la operación de división, y que no esperaba que lo hicieran. El problema trata de 378 dulces a repartir entre 3. Relató que un alumno propuso multiplicar los datos, lo cual fue cuestionado por una niña, quien subrayó que se va a repartir entre tres niños. María comentó que "fue necesario organizar la información en datos, operación y resultado", recurso muy utilizado por los docentes con el objeto de aclarar el problema, pero con la desventaja de apelar de entrada a "una" operación. María dijo que algunos alumnos propusieron dividir "con la casita", lo cual indica que ya tenían algún conocimiento al respecto, pero que ella las disuadió de usar ese recurso. Finalmente mostró el procedimiento desarrollado en el grupo y explicado por un alumno, el cual consistió en descomponer el dividendo y aplicar la distributividad de la división respecto de la suma (véase Figura 2).

El procedimiento se puede sintetizar como sigue:

4. Se refiere a uno de los libros de texto que les proporcionamos.

Figura 2. Procedimiento de descomposición del dividendo



En síntesis, el alumno hizo lo siguiente:

$$378 : 3 = (300+60+18) : 3$$
$$= 100 + 20 + 6$$
$$= 126$$

María concluyó, dejando ver su entusiasmo: “Entonces dio un total de 126 dulces a cada quien, así lo pudieron resolver sin tener como la operación... ¡y me gustó!”. Pensamos que el entusiasmo de María se debe a su descubrimiento reciente de que los alumnos pueden desarrollar por sí mismos procedimientos no convencionales para resolver una operación.

Nora (5º) destacó que María, después de haber manifestado la duda de poner un problema de reparto en la sesión pasada, ahora se había animado. Agregó que se acostumbra a limitar a los niños, y enfatizó sobre los procedimientos interesantes que surgen cuando no los limitan, señalando que esos procedimientos también

son divisiones. Después de esa ocasión, María planteó varios problemas de división, sin la expectativa de que usaran el algoritmo. Este episodio expresa también que el acompañamiento entre las docentes participantes en esta experiencia se hacía cada más visible.

Así, antes de que abordáramos el tema de los distintos procedimientos para dividir, estas dos maestras ya los estaban propiciando, probablemente inspiradas en lo que pudieron ver en las sesiones previas centradas en la suma, la resta y la multiplicación.

Los investigadores aportan información sobre el proceso de aprender a dividir

En la sesión 16, después del episodio narrado por María, D(I) planteó a las docentes un problema que implica dividir, y les pidió que lo resolvieran sin usar el algoritmo de la división.[5] La intención de esta petición fue que las docentes comprobaran por sí mismas que un problema de división se puede resolver cuando aún no se sabe dividir formalmente.[6] Las participantes desarrollaron varios procedimientos: sumas de uno en uno y de 10 en 10, duplicaciones, ensayo y error con multiplicaciones.

Posteriormente, D(I) presentó una gama de ejemplos, extraídos de trabajos experimentales, de resoluciones de alumnos ante problemas que implican dividir, desde 2º a 5º grado de primaria. Los procedimientos fueron diversos, desde repartos uno a uno, sumas o restas repetidas, búsqueda de un factor en una multiplicación, hasta el procedimiento llamado "de cocientes parciales" (CP), que integra de forma más eficiente multiplicaciones, restas y sumas, de manera parecida a la del algoritmo usual (Block Sevilla, Martínez y Moreno, 2013; Secretaría de Educación Pública, 1998).

5. Un barco encalló en alta mar. Quedan 46.800 litros de agua en la cisterna. El capitán estima que para sobrevivir la tripulación y los pasajeros necesitan por lo menos 450 litros de agua por día. ¿Para cuántos días les alcanzará el agua?

6. El hecho de que, además, diferentes tipos de problemas de división pueden propiciar diferentes procedimientos se vio en sesiones posteriores.

Se comentaron las formas de propiciar la evolución de los procedimientos de los alumnos: poner cocientes más grandes, socializar procedimientos en el grupo, y brindar sugerencias de parte del docente.

Los procedimientos de los alumnos evolucionan. Uso de la multiplicación

Nora (5º) y María (3º) siguieron planteando problemas de división. Nora comentó que, para los casos más difíciles en los que había residuo, usó material concreto, pero que poco a poco los alumnos lo abandonaron a favor de otros, repartos uno a uno, formación y conteo de grupos a nivel gráfico, hasta la búsqueda del cociente mediante multiplicaciones: "ya se van directamente a lo inverso, [buscan] qué número multiplicado por tal me puede dar tal". En la sesión 21, María comenta que sus alumnos aprendieron a usar la tabla de Pitágoras y que incluso un alumno concluyó: "La división, maestra, es como una multiplicación al revés", lo cual es una buena definición de esta operación, con el mérito, además, de haber sido producto de las actividades que realizaban con su maestra.

Nora (5º), por su parte, comentó acerca de lo que hicieron sus alumnos: "Yo pensé que ya sabían dividir, y sin embargo hacen lo mismo [que los alumnos de María]".

Cabe observar que Nora da aquí, a "saber dividir", el sentido de usar el algoritmo convencional, aunque, anteriormente, al comentar un procedimiento para dividir que mostró María, dijo claramente que esos procedimientos también son divisiones. Así, el término "dividir" empieza a tener, al menos para Nora, dos sentidos, el que remite al algoritmo y el que remite a la operación más allá del algoritmo.

Los alumnos explicitan y comparten sus procedimientos

En la sesión 17, Nora (5º) destaca el doble beneficio de que los alumnos expliciten y compartan sus procedimientos: por una parte, su propio conocimiento se consolida, y, por la otra, permite que otros alumnos aprendan:

> La satisfacción de poderlos escuchar y decir "¡guau!" a partir de su vocabulario lo pueden externar, ¿no?, y hasta ellos se sienten bien contentos porque lo hablan.
>
> Lo que estoy aprendiendo [...] no es que el niño termine rápido el problema, que lo tenga bien o no, sino es esta parte de poder compartir los procesos entre todos para poder escuchar, y al que le está costando trabajo, pues aprenda algún procedimiento de los que ya tienen...

No saben que saben... el paso de los conocimientos a los saberes

La maestra Rosa (3º) dejó saber que también había estado planteando problemas de reparto, sin que sus alumnos supieran que se trataba de problemas de división (sesión 20). Relató que los alumnos le preguntaron sobre cuándo iban a estudiar "la división", y que ella les dijo que ya llevaban tiempo haciendo problemas de división, lo cual da cuenta de que, para ella, la división ya no se reducía a la técnica usual. Ha planteado problemas de reparto con material, pero también usando las tablas de multiplicar. Como hemos comentado, en el desarrollo de un conocimiento a partir de la resolución de problemas es común que el conocimiento sea puesto en juego, en un primer momento, de manera implícita. Los investigadores explicaron que entre poder resolver problemas que implican dividir y saber que está en juego una nueva operación que se llama división hay una distancia que los alumnos deben cruzar con ayuda del docente: es el paso de lo implícito a lo explícito, de los conocimientos a los saberes (Brousseau, 1998 y 2000).

4.2. Otros aspectos que conforman al conocimiento disciplinar y didáctico de la división

El proceso de conocimiento y la valoración de los procedimientos no convencionales para dividir ocurrieron de manera paralela a un conocimiento más amplio y profundo de la didáctica de la operación de división. Se vieron dos significados de la división, relacionados con la estructura semántica de los problemas, los que consisten en repartir

y los que consisten en ver cuántas veces cabe una cantidad en otra (Vergnaud, 1988). Se vieron también algunas variables didácticas de los problemas, entre otras, la de las magnitudes, longitud, superficie y tiempo; las diversas formas de presentación de problemas además del clásico texto, por ejemplo, usando tablas de variación, y se analizaron los distintos papeles que puede jugar el residuo en los problemas. Debido a la necesidad de limitar la extensión del presente texto, no ahondaremos en estos aspectos.

Otra actividad que las maestras abordaron en sus clases fue la invención de problemas: María explicó, en la sesión 18, que puso las cuatro operaciones a sus alumnos para que inventaran problemas. Previamente les recordó que "sumar es agregar, restar es quitar, multiplicar es repetir varias veces, y dividir es repartir". Si bien relaciona cada operación con solamente uno de sus significados (más adelante volvemos sobre este punto), se trata de una actividad útil desde dos puntos de vista: reflexionar sobre el sentido de las operaciones y revisar la consistencia de los problemas, sobre todo que sean claros, y que se puedan contestar las preguntas. También la maestra Rosa y la maestra Alma (en la sesión 20) expresaron haber hecho la actividad de inventar problemas con buenos resultados. Es probable que el recurso de inventar problemas lo hayan tomado del texto de Parra y Saiz (2007), el cual fue comentado en algunas de las sesiones de trabajo colectivas.

4.3. Necesidades de conocimiento que surgen con los cambios

La introducción de la división a partir de problemas que los alumnos resuelven con sus propios recursos, sin darles a conocer el algoritmo convencional, dio lugar también a dificultades que las docentes enfrentaron. Presentamos a continuación algunas de ellas.

¿Qué operación usamos, multiplicación o división? Dificultades que emergen en la comunicación

Cuándo se resuelve un problema de división mediante sucesivas aproximaciones al cociente con multiplicaciones, ¿qué operación se puede decir que se está usando? Al

respecto, la maestra María relató la confusión que ocurrió cuando un alumno dijo que él usaba la multiplicación, y una alumna lo rebatió diciéndole que eso no puede ser porque la multiplicación hace más grande, y aquí se reparte. Se vuelve necesario explicitar que la multiplicación se puede usar de dos maneras, para buscar el producto y para buscar un factor. Un poco más adelante tendrán que saber que, cuando se usa de la segunda manera, están dividiendo.

Otra confusión derivada de las dos formas mencionadas de usar la multiplicación fue entre el resultado de la operación y el resultado del problema. La docente Rosa (3º) relató que algunos de sus alumnos resolvieron el problema que consiste en repartir nueve bolitas entre tres niños buscando el número que multiplicado por 3 da como resultado 9. Encontraron el factor 3, pero dieron como respuesta el 9, porque "ese es el resultado" de la operación que usaron.

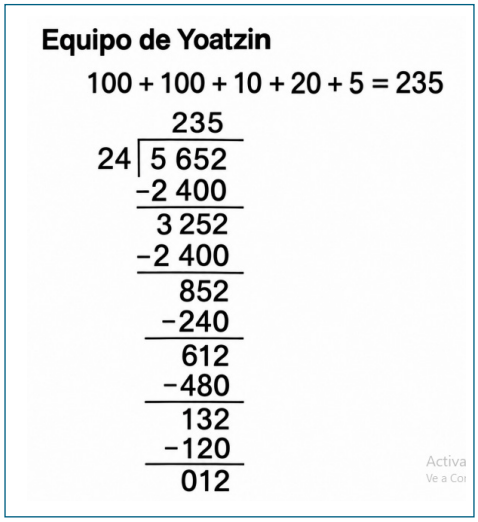
No supimos como respondieron las docentes a este tipo de confusiones, sin embargo, lo que nos parece relevante de la aparición de estas es el hecho mismo de que las identificaran y las consideraran como algo interesante para comentar. Las "confusiones" revelan aspectos del conocimiento en juego, la división, pertinentes desde el punto de vista didáctico y, hasta donde sabemos, poco visibilizados en la literatura. Es decir, estas "confusiones" parecen ser más bien pequeñas lagunas, identificadas por las docentes, del conocimiento disponible en la enseñanza de la división.

Tres conocimientos distintos implicados en la categoría "saber dividir"

A lo largo del trabajo con el tema de la división surgió la necesidad de diferenciar, con las docentes, tres conocimientos implicados en la división: uno, el que se manifiesta en la capacidad de resolver un problema de división, aunque no se sepa que la operación implicada es la división, se trata de un conocimiento implícito en la acción (Brousseau, 1998, 2000), también llamado *en acto* (Vergnaud, 1990); el segundo, el reconocimiento explícito de que la operación en juego es una división, posiblemente como producto de un trabajo de institucionalización (Brousseau, 1998, 2007); y un tercero, el conocimiento del algoritmo usual para dividir. En

varios momentos, los tres tipos de conocimientos parecían reducirse a uno solo, al del algoritmo. Diferenciarlos fue producto principalmente de los análisis de los procedimientos de los alumnos, y creemos que, recíprocamente, también favorecieron dichos análisis.

Figura 3. Ejemplo del procedimiento de cocientes parciales



Fuente: SEP, 1998, p. 109.

Dificultades para introducir un algoritmo alterno

En la sesión 16, cuando presentamos ejemplos de procedimientos de niños para resolver problemas que implican dividir, dimos también ejemplos del procedimiento de cocientes parciales (CP) (véase un ejemplo en la Figura 3), el cual puede llegar a ser bastante eficiente, y con la ventaja, respecto del usual, de no implicar un trabajo con cifras aisladas que representan valores posicionales, sino numerales completos, con lo cual los alumnos pueden comprender fácilmente los pasos que lo componen y, más aún, pueden desarrollar por sí mismos aproximaciones a ese procedimiento

(Block Sevilla, Martínez y Moreno, 2013). Sin embargo, las docentes no pudieron implementar con sus alumnos dicho procedimiento en tanto algoritmo alternativo y provisional. Los motivos fueron varios, uno de ellos se manifestó en la clase de la maestra Nora, en donde varios alumnos ya dominaban el algoritmo usual y no les motivaba estudiar otro. Dijo la maestra, hablando del procedimiento de CP:

> Yo quedé fascinada, yo dije, "¡Ay, está bien, bonito!", porque realmente se ve de dónde sale las decenas, las unidades, y hoy dije, vamos a hacerlo, [pero] vi que los otros dijeron "¡Nooo, el rápido!", [y] optaron por el rápido [el procedimiento convencional] y se casaron con ese, ya no me hicieron los procedimientos como los que usted nos había mostrado [de cocientes parciales]...

En otro momento, la maestra Nora observó que algunos de sus alumnos aplicaban mal el algoritmo convencional, e intentó nuevamente introducir el procedimiento de CP. Sin embargo, se dio cuenta de que al menos uno de ellos empezaba a revolver con los dos procedimientos, el de CP y el convencional.

La maestra María (3º), por su parte, expresó que sus alumnos ya dominaban el uso de la tabla de multiplicaciones para resolver las divisiones, y preguntó si sería oportuno enseñar el algoritmo. Se le aconsejó esperar hasta el grado siguiente (cuarto año) y, mientras tanto, introducir el procedimiento de CP. No sabemos finalmente qué decidió María, pero un poco después comentó que los padres de algunos de sus alumnos les habían enseñado el algoritmo.

Finalmente, Rosa (3º) también señaló que fueron los padres quienes empezaron a introducir el algoritmo convencional cuando ella dejó un problema de división de tarea. En otro momento comentó que sus alumnos le pidieron que les enseñara "la división", o sea, el algoritmo.

Así, se pudo observar que por distintos motivos expresados por los diferentes actores –los niños, los padres, los otros maestros– pretender introducir un algoritmo alternativo fue ir a contracorriente de lo que todavía hoy se suele considerar que debe enseñarse acerca de las operaciones. Aun en el caso de una docente que expresó una clara convicción por el algoritmo alternativo, las dificultades a las que se enfrentó en el aula la llevaron a desistir.

Este episodio en torno a un procedimiento alternativo al algoritmo usual expresa también la diversidad de respuestas ante las propuestas didácticas que se presentaron en el espacio colectivo: algunas fueron retomadas por unas docentes pero no por otras; algunas de las que fueron retomadas se integraron rápidamente y produjeron resultados visibles, como la de proponer un problema de división antes de enseñar a dividir; y otras, como esta última, dieron lugar a dificultades de diversa índole y acabaron por ser abandonadas o pospuestas. En todos los casos, cuando fueron retomadas, lo hicieron con matices particulares.

4.4. Prácticas distintas que conviven

Como era previsible, los procesos fueron diferentes para cada una de las docentes y las prácticas emergentes que se fueron estableciendo convivieron con otras que persistieron. En lo que sigue comentamos algunas de estas últimas.

Las palabras clave

Para ayudar a los alumnos a identificar la operación que resuelve un problema, algunas de las docentes comentaron que destacaban ciertas "palabra clave", como "quitar" para problemas de resta, "agregar" para los de suma, y "repartir" para los de división. Esta es una práctica muy extendida en la primaria. Los investigadores intentamos poner sobre aviso a las docentes de que el uso sistemático de ese recurso podía ser contraproducente, pues, por ejemplo, no todos los problemas de división son sobre repartir, ni todos los problemas que incluyen la palabra "repartir" corresponden a una división. La docente Nora relató al respecto que puso un problema en el que se hablaba de repartir, pero que no era de división y, comentó que efectivamente varios de sus alumnos hicieron una división. Los investigadores añadimos que, además de lo anterior, ayudar a los alumnos destacando palabras clave les impide aprender a encontrar por sí mismos las herramientas que les pueden servir.

Las metáforas

En la sesión 23, última sobre el tema de división, Rosa platica que enseñó a los niños el algoritmo de la casita con un cuento.

> Había una vez un número que estaba dentro de la casita, vino de visita otro número, pero para poder entrar había una regla, el número tenía que ser más pequeño que el de la casita, o igual si el número era más grande que el que estaba dentro [...]

El resto del cuento es la descripción paso por paso del algoritmo. Cuando se pidió a los demás su opinión, María comentó que nunca se le hubiera ocurrido y que le gustó. D(I) optó por no cuestionar la utilidad de la metáfora, y solamente matizarla comentando que, en su opinión, si ya se logró una buena comprensión de la división, incluyendo procedimientos diversos para dividir, cabe dar un lugar a memorizar el algoritmo usual, sin expectativas de que se comprenda, y que para eso el cuento de Rosa puede ser útil.

El material concreto

En cierto momento del trabajo con la división, Rosa (3º) relató que había hecho un material para los problemas de reparto: se trataba de nueve cajas de diferentes colores pegadas en un cartoncillo, formando un círculo, con una caja más al centro. Rosa explicó que la finalidad de este material era plantear problemas de reparto: se pone una cantidad de objetos pequeños en la caja del centro, y se pide a los alumnos que los repartan entre las demás cajas, en partes iguales.

El uso de este material, atractivo visualmente, tiene algunas limitaciones: una es que, por lo que explicó la docente, el material mismo no se usa como una forma de verificar, sino como una forma de resolver. Esto hace que su beneficio se limite a perfeccionar el reparto físico, sin dar lugar al desarrollo de procedimientos numéricos. Otra limitación es el costo en tiempo de elaborar el material,

en relación con el uso que le pueden dar los niños. Si las cajitas estuvieran sueltas y sin pintar sería más fácil variar el divisor (el número de cajas), y el tiempo de elaboración sería menor.

La idea de manipular material concreto tiene una larga tradición en la enseñanza de las matemáticas, y ha sido promovida desde distintas perspectivas.[7] Si bien se trata de un recurso muy útil, la investigación didáctica ha puesto en evidencia que su beneficio depende mucho del modo en que se use (por ejemplo, Houdement y Petitfour, 2020). Analizar en qué condiciones el material resulta provechoso podría constituir un tema interesante para trabajar en la formación docente.

El problema de los problemas, ¿por las deficiencias de lectura nada más?

La maestra Alma destacó, al menos en dos ocasiones, que "el problema de los problemas" radica en la dificultad de los alumnos para comprender el texto, para saber lo que les están pidiendo. Explicó que lo que ella hace es contextualizar los problemas con situaciones familiares ("imagínense que tengo dulces y los voy a repartir...") con objetos, chocolates, pelotas... En otros momentos las demás docentes también hicieron referencia a la dificultad de la comprensión del texto.

Los investigadores coincidimos en que la falta de comprensión de la consigna o del texto puede ser un primer obstáculo. Se habló de la conveniencia de no plantear siempre los problemas en el formato de un texto y de alternarlos con el uso de imágenes, tablas, y con material concreto. Pero también destacamos la presencia de otra dificultad, que puede aparecer aun cuando hay una buena comprensión del texto: la de establecer las relaciones necesarias entre las cantidades para identificar

7. Algunas pedagogías "sensualistas" (Brousseau, 1998) del siglo XIX y principios del XX destacaban el valor de "ver y tocar"; la metodología de enseñanza desarrollada por M. Montessori daba una gran importancia a ciertas formas de uso de material concreto; más adelante, en la segunda mitad del siglo XX, Z. P. Dienes propone el uso de diversos materiales estructurados y surgen también numerosas propuestas basadas en inferencias pedagógicas de la etapa de las operaciones concretas de la teoría piagetiana sobre el desarrollo cognitivo.

la forma de resolver el problema, o de resolverlo de manera más económica. Esto último es frecuente sobre todo en los problemas que implican nociones nuevas para los alumnos, los cuales requieren de un proceso en el que deben ensayarse resoluciones diversas, rudimentarias al principio, eventualmente constatar que son erróneas, e irlas mejorando.

4.5. Otros factores que dificultan los cambios, y que no están en manos de los maestros

Una dificultad para la introducción de ciertas innovaciones es la escasez de tiempo. En las escuelas, la combinación de programas sobrecargados de contenidos, junto con las numerosas interrupciones de las clases por diferentes motivos (festivales, paros, otras demandas institucionales), tienen como consecuencia una presión grande sobre el tiempo que queda disponible para enseñar (Rockwell, 2013). Los caminos alternativos que hemos intentado compartir con los docentes tienen casi siempre la característica de que implican mayor inversión de tiempo para el estudio de los mismos temas.[8] Las docentes que optan por explorar estos caminos a veces toman decisiones difíciles como la de postergar contenidos para el grado siguiente.

Una segunda dificultad para los maestros cuando intentan hacer ciertos cambios que alejan lo enseñado de lo que usualmente se considera como conocimientos matemáticos a enseñar es cierta incomprensión por parte de los padres de familia, o incluso de sus colegas, y la presión que ejercen para reencauzar las prácticas por el camino habitual. En la presente experiencia, esta dificultad se manifestó relativamente poco. Un caso fue cuando la maestra María se animó a plantear problemas de división a sus alumnos, antes de enseñarles a dividir, con la idea de dar lugar al desarrollo de procedimientos personales, y, en la primera ocasión en que dejó problemas de tarea, varios niños llegaron con la novedad de que sus padres les habían

8. Muy posiblemente este tiempo se recupera en el largo plazo, pero en el momento complica la demanda de "cubrir el programa del año" o, peor aún, del semestre, del trimestre o incluso del mes.

enseñado a dividir con el algoritmo. Las docentes comentaron la necesidad de comunicar a los padres la manera en que se desarrolla la enseñanza de contenidos matemáticos, sobre todo cuando difiere de lo usual, sin dejar de ver que, en cualquier caso, es mejor contar con la ayuda de los padres que no contar con ella. Por otra parte, Rosa comentó que incluso su esposo la cuestionaba, preguntándole "por qué tanto procedimiento si es bien fácil". En otra ocasión María comentó que una de sus compañeras le sugirió que dejara de hacer esas actividades con sus alumnos, pues los alumnos de ella ya le pedían ese tipo de actividades.

Cabe señalar que si bien los colegas pueden ser un factor que dificulta ciertos cambios en las prácticas docentes, también suelen ser un factor que los favorece cuando se comparte con ellos la aventura de explorar nuevas rutas, como fue el caso de las tres docentes que participaron en la experiencia y que proceden de la misma escuela.

5. Conclusiones

En lo que sigue destacamos los aportes de la experiencia reseñada, así como algunas de las dificultades y limitaciones.

5.1. Procesos de apropiación de una perspectiva constructivista de aprendizaje y de enseñanza

Respecto del propósito de compartir con las docentes, *in situ*, una perspectiva constructivista sobre la enseñanza de las matemáticas, y, al mismo tiempo, conocer algunos aspectos de cómo esta es asimilada por ellas, fue posible identificar resultados. Una síntesis expresiva de una conceptualización enriquecida del proceso de aprender a dividir puede apreciarse en la siguiente intervención de Nora, en la sesión 21:

> [...] Estás haciendo división, o sea, en todo momento estás haciendo división. No es necesario que tengas el algoritmo y creo que [hay que] romper ese esquema de los padres de familia. Sí, es complicado porque ellos quieren ver el algoritmo

> ¿no? [...] Cuando nosotros ahorita vemos [que dividir implica] representar, multiplicar, agrupar y todo este tipo de operaciones... e incluso cuando se les pregunta "a ver dime cómo lo resolviste", la parte (de) comunicar, es bien complicado, porque escribir es difícil, ahora la parte de oralidad también es un reto, es sobre todo para estas edades de tercer año.

Como deja ver la intervención de Nora, la comprensión de lo que puede requerir un proceso de aprendizaje que arranca con la resolución de problemas, incluye, además de la resolución, individual o en equipos, otros componentes, algunos de los cuales fueron identificados por las docentes, en particular, el de la explicitación de los procedimientos.

Las docentes María y Rosa dejaron ver también un enriquecimiento de su idea de cómo se aprende la operación de división, y un sutil cambio en sus prácticas, al descubrir la posibilidad de que los alumnos resolvieran problemas de división antes de enseñarles el algoritmo, aunque no llegaron a expresarlo de una manera tan explícita y estructurada como la de Nora.

La existencia de procesos de apropiación individuales, diferenciados, de las docentes era previsible, y no deja de ser importante subrayarla. Las docentes participaron en la experiencia desde sus saberes docentes (Mercado, 2002), es decir, desde su trayectoria personal y profesional, a partir de sus experiencias como estudiantes de educación básica, en su formación inicial como docentes y a través de sus años de servicio. La trayectoria de cada una se distinguió de las demás por las decisiones que fue tomando, por ejemplo, la de posponer la enseñanza de unos contenidos para dar más tiempo al estudio de otros; por el grado de arraigo a ciertas prácticas (las palabras clave, ciertas formas de usar el material concreto, el recurso al formato de "datos, operaciones y resultado"). Sin embargo, más allá de esta diversidad, fue posible identificar en al menos tres de las docentes un enriquecimiento de su concepción de lo que significa cada una de las nociones que fueron trabajadas –de la división, en este caso–, junto con una valoración de los procedimientos alternativos, reflejada en acciones concretas en el aula.

Estos indicios de cambios ocurrieron pese a ciertas condiciones de la escuela que los dificultaban, y frente a las cuales las docentes fueron esbozando medidas

que se podrían tomar: ante la escasez de tiempo para enseñar, posponer para el grado siguiente algunos aspectos de los contenidos; para disminuir la presión de los padres de familia por enseñar ciertos contenidos de determinadas maneras, explicarles el sentido de algunas decisiones, y eventualmente plantearles actividades a ellos; ante la heterogeneidad de los grupos, fomentar más el trabajo en equipos, diferenciar la dificultad de las tareas, o redistribuir a los alumnos en los grupos escolares. Dichas medidas no necesariamente tenían el consenso de todos los participantes, pero consideramos positivo el que fueran planteadas y discutidas.

Finalmente, cabe destacar la mejora en la explicitación de las prácticas. Los relatos de las docentes, muy generales al principio, fueron ganando en precisión y riqueza, eventualmente con el apoyo de audios, fotos y videos, para lo cual ayudaron las preguntas de los investigadores, quienes solicitaban constantemente más detalles sobre lo realizado. Esta mejora en la explicitación de las prácticas es un componente relevante del desarrollo profesional (Block Sevilla *et al.*, 2013; Perrenoud, 2011) y puede interpretarse también como un incremento del conocimiento interpretativo de las docentes (Gibim *et al.*, 2025; Ribeiro, 2024).

Consideramos que la identificación de expresiones muy específicas, como las arriba mencionadas, de los aportes del dispositivo colaborativo a las prácticas de las docentes, a través de sus relatos, contribuye a la valoración de los dispositivos colaborativos, máxime si se consideran las dificultades para establecer vínculos precisos entre las características de estos dispositivos y la evolución de las prácticas docentes (Fiorentini y Losano, 2024, citado en Borko y Potari, 2020).

5.2. Aportes de la experiencia al conocimiento didáctico de la división

La experiencia dejó ver también dificultades sutiles y necesidades de conocimiento en el proceso de propiciar ciertos cambios en la enseñanza de dicha noción. En particular, se manifestó la necesidad, en la comunicación con las docentes, de distinguir aspectos de distinta naturaleza en lo que se considera como "saber dividir" –resolver problemas que implican dividir, reconocer explícitamente la

operación, conocer el algoritmo usual–, así como la necesidad de términos para referirse, temporalmente, con los alumnos, a ciertos elementos durante el proceso –para dividir se usó la multiplicación, pero *de otra manera*, es una "multiplicación al revés", como dijo un alumno–. Este trabajo contribuye en mostrar la pertinencia para los docentes de primaria de establecer esta diferenciación de aspectos en el conocimiento de una operación, diferenciación que se relaciona con las categorías de conocimiento implícito y explícito (Brousseau, 1998). Otro aspecto que merece seguir siendo estudiado y discutido es el de los conflictos generados por la presencia de dos algoritmos, el usual, con fuerte arraigo en la escuela, y el de cocientes parciales, con ventajas didácticas significativas: ¿vale la pena introducir ambos?, ¿es posible hacerlo sin generar confusiones?, ¿o es preferible mantener solamente uno?, y, en ese caso, ¿cuál?

5.3. Aportes de la experiencia a la conformación de un dispositivo de formación

A continuación destacamos los factores que parecen haber contribuido a la conformación de un intercambio productivo entre docentes e investigadores en torno a las prácticas de los primeros; intercambio que ha sido ponderado en los estudios sobre proyectos colaborativos (por ejemplo, Da Ponte *et al.*, 2022).

- El hecho de que los contenidos de trabajo se definieran y desarrollaran a partir de inquietudes y necesidades de las docentes favoreció que los temas abordados fueran relevantes para ellas.
- Si bien no hubo un trabajo conjunto de planeación, pues cada docente planeó su clase por su cuenta, en sus clases fueron incorporando distintos elementos de lo estudiado en el grupo. Aunado a ello, la periodicidad semanal de las sesiones hizo posible un ir y venir entre las prácticas que tenían lugar en las aulas, expresadas a través de los relatos de las docentes, y los aportes que tanto los investigadores como las propias docentes hacían al comentar lo relatado (sugerencias de recursos, actividades, materiales de consulta).

- La duración de la experiencia de más de un año lectivo (con 34 sesiones de trabajo) ofreció condiciones para que se instalara un ambiente de confianza entre los participantes, y la posibilidad de un desarrollo progresivo de un lenguaje compartido sobre la enseñanza de las matemáticas (Sensevy *et al.*, 2013).
- La distribución del tiempo asignado a las participaciones, aproximadamente 75% para los relatos de las docentes de lo acontecido en el aula, y 25% para los comentarios y propuestas de los investigadores, resultó ser una proporción adecuada para asegurar la presencia tanto de los aportes desde la práctica como desde la investigación.
- La realización de algunas situaciones didácticas en las que las docentes participaron como alumnas, con características similares a las de las situaciones que se busca promover en la escuela en una perspectiva constructivista –estrategia basada en la homología (Houdement y Kusniak, 1996, p. 301)–, permitió que ellas vivieran procesos de búsqueda matemática y se sensibilizaran sobre las posibilidades de aprendizaje que se podían abrir para sus alumnos con ese tipo de situaciones.
- Los materiales que se fueron poniendo a disposición de las docentes, libros de texto, artículos con situaciones didácticas de calidad y análisis de producciones de alumnos, siempre relacionados con los temas que se estaban trabajando, les dieron cierta autonomía respecto de los investigadores en la búsqueda de alternativas didácticas, beneficio que seguramente se extenderá más allá de este dispositivo de formación.

Por último, es importante mencionar que el hecho de que tres de las cuatro docentes que participaron de manera regular procedieran de la misma escuela y estuvieran constituidas en equipo antes de que la experiencia iniciara, aunado al interés que manifestaron por mejorar la enseñanza de las matemáticas y al compromiso que sostuvieron durante la experiencia, fueron aspectos fundamentales para el buen funcionamiento del dispositivo.

Referencias

Artigue, M. (2011). "L'ingénierie didactique comme thème d'étude". En C. Margolinas, M. Abboud, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vanderbrouck y F. Wozniak (coords.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques: XVè école d'été de didactique des mathématiques* (vol. 1, pp. 15-25). La Pensée Sauvage.

Ávila, A. (1996). Los usos reconocidos de los textos de matemáticas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 1*(2), 314-342. https://www.redalyc.org/pdf/140/14000204.pdf

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Block Sevilla, D. (2023). Matemáticas: desastrosas. *Nexos. La imposición educativa*, (549), 58-61. https://www.nexos.com.mx/matematicas-desastrosas/

Block Sevilla, D., Martínez, P. y Moreno, E. (2013). *Repartir y comparar. La enseñanza de la división entera en la escuela primaria*. (Colección "Somos Maestr@s" de la Serie "Enseñar y Aprender"). SM de ediciones S.A. de C.V.

Block Sevilla, D., Martínez, P., Mendoza, T. y Ramírez, M. (2013). La observación y el análisis de las prácticas de enseñar matemáticas como recursos para la formación continua de maestros de primaria. Reflexiones sobre una experiencia. *Educación Matemática*, *25*(2), 31-59. https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/2016/05/16/vol25-2-2-en/

Block Sevilla, D., Moscoso, A., Ramírez, M. y Solares, D. (2007). La apropiación de innovaciones para la enseñanza de las matemáticas por maestros de educación primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 12*(33), 726-731. https://www.redalyc.org/pdf/140/14003313.pdf

Borko, H. y Potari, D. (eds.). (2020). *Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups: ICMI Study 25*. Springer.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, *12*(1), 5-38. https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol12/1/03Brousseau.pdf

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (trad. Dilma Fregona). Libros del Zorzal.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981.

Carvajal, A. (2004). Las matemáticas en la escuela primaria: construcción de sentidos diversos. *Educación Matemática*, *16*(3), 79-101. https://doi.org/10.24844/em1603.04

Da Ponte, J., Quaresma, M. y Mata-Pereira, J. (2022). Teachers' learning in lesson study: insights provided by a modified version of the interconnected model of teacher professional growth. *ZDM. The international journal on mathematics education*, (54), 373-386. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01367-1

Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P., Poirier, L. y Couture, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation*, *27(*1), 33-64. https://doi.org/10.7202/000305ar

Espinosa, E. (2007). *Los maestros y la apropiación de nuevas propuestas pedagógicas. Estudio etnográfico de la incorporación de una reforma para la alfabetización inicial en la primaria* [Tesis de Doctorado]. Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav-IPN. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/5033

Gibim, G., Rifo, L., Climent, N. y Ribeiro, M. (2025). Conhecimento interpretativo de professores em uma tarefa de divisão de frações. *PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *19*(3), 305-329. https://doi.org/10.30827/pna.v19i3.31002

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathematiques*, *16*(3), 301.

Houdement, C. y Petitfour, E. (2020). La manipulation dans l'enseignement spécialisé: aide ou obstacle? Une étude de cas autour de la numération décimale. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *40*(2), 179-219.

Mercado, R. (2002). *Los saberes docentes como construcción social. La enseñanza centrada en los niños.* Fondo de Cultura Económica.

Parra, C. y Saiz, I. (2007). *Enseñar aritmética a los más chicos: de la exploración al dominio*. Homo Sapiens.

Perrenoud, P. (2011). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar. Profesionalización y racionalidad pedagógica*. Graó.

Ribeiro, M. (2024). Conhecimento interpretativo de futuros professores da Educação Infantil e dos anos iniciais ao atribuírem significado a produções de alunos no contexto de abordagens alternativas ao algoritmo típico da subtração. *Debates em Educação*, *16*(38). 1-26. http://doi.org/10.28998/2175-6600.2024v16n38pe16020

Robert, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *21*(1.2), 57-80. https://revue-rdm.com/2001/les-recherches-sur-les-pratiques/

Rockwell, E. (2013). "La complejidad del trabajo docente y los retos de su evaluación: resultados internacionales y procesos nacionales de reforma educativa". En R. Ramírez (coord.), *La reforma constitucional en materia educativa: alcances y desafíos* (pp. 77-109). Instituto Belisario Domínguez, Senado de la República. https://www.uv.mx/personal/kvalencia/files/2013/09/rcmead.pdf

Rockwell, E. y Mercado, R. (1988). La práctica docente y la formación de maestros. *Investigación en la Escuela*, (4), 65-78. https://revistascientificas.us.es/index.php/IE/article/view/9314/8109

Roditi, E. y Trgalová, J. (2016). "Collectifs de professeurs et de chercheurs". En. Y. Matheron, G. Gueudet, V. Celi, Ch. Deouet, D. Forest, M. Krysinska, S. Quilio, M. Rogalski, T. A. Sierra, C. Wilslow y S. Besnier (coords.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques. XVIIIe école d'été de didactique des mathématiques* (pp.183-202). La Pensée Sauvage Éditions.

Secretaría de Educación Pública (1998). *Matemáticas. Cuarto Grado*. Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos. [1994]

Scavino, C., Gizirian, M. y Grego, M. (2025). Formación docente en prácticas situadas: aportes para su diseño desde tres enfoques. *Análisis de las Prácticas*, (4), 43-70. https://portalrevistas.unipe.edu.ar/index.php/analisispracticas/article/view/397/348

Sensevy, G., Forest, D., Quilio, S. y Morales, G. (2013). Cooperative engineering as specific design-based research. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *45*(7), 1.031-1.043. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0532-4

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. http://www.jstor.org/stable/1175860

Souto, M. (2019). Acerca de la noción de dispositivo en la formación universitaria. *Educación, Lenguaje y Sociedad*, *XVI*(16), 1-16. http://dx.doi.org/10.19137/els-2019-161602

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. En J. Hiebert y M. Behr (eds), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (vol. 2, pp. 141-161). Lawrence Erlbaum Associates y National Council of Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2,3), 133-170. https://www.ecosad.org/laboratorio-virtual/images/biblioteca-virtual/bibliografiagc/teoria-de-campos-conceptuales-vergnaud-1990.pdf

Yurén, M. T., Navia, C. y Saenger, C. (eds.) (2005). *Ethos y autoformación del docente. Análisis de dispositivos de formación de profesores.* Ediciones Pomares.

Recepción: 14/01/2026

Aceptación: 18/08/2026