Verónica Cambriglia, María Paula Trillini** y Matías Eduardo R. Maidana****

El aula como sostén de una nueva práctica de estudio sobre expresiones numéricas

Resumen

En este trabajo reflexionamos sobre el papel central del accionar docente en la construcción inicial de una práctica algebraica en el aula, así como sobre el valor del espacio colectivo como condición que potencia dicho proceso. Nos interesa enfatizar cómo esta práctica puede favorecer el desarrollo de hábitos de lectura de información en expresiones numéricas y de transformación que permita producir nuevas lecturas. El análisis de las producciones, tanto en situaciones adidácticas como en momentos de trabajo colectivo, permite poner en evidencia la importancia de la gestión docente como motor de articulación entre los conocimientos aritméticos construidos en la escuela primaria y las tareas algebraicas sobre expresiones numéricas, en el marco del estudio de la divisibilidad.

Palabras Clave

Álgebra • aritmética • expresiones numéricas • nivel secundario • acción docente

* Doctora en Ciencias Matemáticas (UBA) y profesora en Matemática. Es investigadora en Didáctica de la Matemática, con foco en el estudio de los procesos de generalización en la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Actualmente es profesora adjunta en el IDH (UNGS) y en la FCEyN (UBA). Combina la docencia universitaria con la investigación educativa en matemática. Correo electrónico: vcambrig@campus.ungs.edu.ar. Orcid: orcid.org/0000-0002-8706-5805

** Especialista en Didáctica de la Matemática (UNGS) y profesora de Enseñanza Media y Superior (UBA). Actualmente, cursa el Doctorado en Educación en la UNAHUR, donde también se desempeña como investigadora docente y profesora adjunta. Está a cargo de las materias Didáctica de la Matemática I y II del Profesorado Universitario de Matemática. Correo electrónico: maria.trillini@unahur.edu.ar. Orcid: orcid.org/0009-0000-2203-914X

*** Profesor de Matemática, licenciado en la Enseñanza de la Matemática (UNLZ), diplomado en IA (Untref), especialista y magíster en Educación (Udesa). Se desempeña como investigador docente en el IDH (UNGS) y como formador de formadores. Además, es capacitador en matemática para los CIIE de la provincia de Buenos Aires. Correo electrónico: mmaidana@campus.ungs.edu.ar. Orcid: orcid.org/0000-0003-0365-6649

The classroom as a support for a new study practice on numerical expressions

Abstract

In this paper, we reflect on the central role of teachers' actions in the initial construction of algebraic practice in the classroom, as well as on the value of the collective space as a condition that enhances this process. We emphasize how this practice can foster the development of habits for interpreting information in numerical expressions and transforming them in ways that enable new interpretations. The analysis of student work –both in adidactic situations and during collective activities– highlights the importance of the teacher as a catalyst for linking the arithmetic knowledge acquired in elementary school with algebraic tasks involving numerical expressions within the context of studying divisibility.

Keywords

Algebra • arithmetic • numerical expressions • secondary school • teaching practice

1. Introducción

En este artículo analizamos la actividad matemática en un aula que inicia sus primeros aprendizajes del álgebra en relación con la gestión docente que tuvo lugar.[1] La propuesta de enseñanza –que crea el ambiente para esta actividad– se aloja en el estudio de condiciones impuestas sobre expresiones numéricas y algebraicas definidas sobre números naturales y consta de dos partes:[2]

1. Este artículo es parte de una investigación enmarcada en el proyecto 30/3329 Emergentes colectivos de generalización en una entrada al álgebra pensada en un espacio de trabajo colaborativo.

2. Para profundizar en la propuesta de entrada al álgebra en vínculo con la aritmética elaborada por el Grupo Lunes se sugiere la lectura de un artículo publicado en la *Revista Urania*, https://drive.google.com/file/d/11IZKDOR9tKsLb6cJNm8Y9tAU1GvlYfKB/view

- una primera parte tiene como objetivo el desarrollo de hábitos de lectura y transformación sobre expresiones numéricas en los alumnos,[3]
- una segunda parte, apoyada en los aprendizajes desarrollados en la primera, aborda el desarrollo de habilidades de lectura y transformación sobre expresiones algebraicas.

La propuesta fue elaborada por un grupo de profesores e investigadores que se autodenomina Grupo Lunes (GL)[4] y busca integrar sentidos aritméticos construidos por los alumnos en la escuela primaria con la enseñanza de los primeros aprendizajes del álgebra. Específicamente, se organiza alrededor de tareas para estudiar si una expresión numérica o algebraica, definida sobre los números naturales, es múltiplo de un número dado.

Emprender en el aula un trabajo con expresiones numéricas en el contexto de la divisibilidad resulta una vía fructífera de entrada al trabajo algebraico, que requiere de una acción docente que dé apertura a la circulación de una diversidad de conocimientos de los alumnos. Con la expectativa de iluminar aspectos de esta acción, realizamos el análisis en este escrito con datos registrados durante la implementación de la primera parte de esta propuesta. En particular, se necesitará de un docente que se posicione como vector de continuidad y ruptura entre las prácticas de corte aritmético y las prácticas de corte algebraico a las que se espera arribar. En tal sentido, el posicionamiento didáctico al que hacemos referencia implica una conceptualización de la aritmética desde dos perspectivas simultáneas: como sostén y como influyente. Sostén, en tanto repertorio de conocimientos disponibles para tratar con nuevos problemas, e influyente como motor hacia el álgebra escolar.

El estudio de condiciones impuestas sobre expresiones numéricas habilita que los estudiantes dispongan de un contexto aritmético cercano al de las prácticas

3. Las autoras y el autor de este documento adhieren a una perspectiva de género. Sin embargo, optamos por el uso genérico del masculino en su condición de término no marcado por la oposición masculino/femenino. Motiva esta decisión el hecho de facilitar la lectura.

4. Nos referiremos al GL con mayor detalle en apartados posteriores.

desarrolladas en la escolaridad primaria y, a su vez, da lugar a un campo de problemas fértiles, que otorga otro sentido[5] a dichas expresiones, configurándose como objetos matemáticos nuevos susceptibles de su tratamiento algebraico. Sin embargo, esta posición implica un aspecto paradojal: el estudio de condiciones impuestas sobre expresiones numéricas horizontales esconde un trabajo algebraico sobre lo numérico en el mismo inicio del aprendizaje algebraico. Atendiendo a ello, nos proponemos asumir en este texto el análisis de esta complejidad poniendo especial relevancia en la acción del docente en relación con los problemas y la actividad matemática que se despliega en el aula.

2. Elementos teóricos en torno al estudio de las expresiones

Chevallard (1984, 1989, 1990) sostiene que existe una dialéctica entre lo numérico y lo algebraico, anterior a la construcción del lenguaje algebraico. Este autor diferencia la aritmética práctica de la aritmética "algebraica"; la primera se apoya en la cualidad designativa del lenguaje numérico y la segunda se centra en el valor mostrativo de las escrituras, atributo que configura la posibilidad de proponer una práctica algebraica sobre las expresiones numéricas en el aula.

Borsani, Luna y Sessa (2021) recuperan de Chevallard esta distinción entre aritmética práctica y aritmética teórica:

> La primera, denominada también aritmética práctica, tiene por objeto la realización de operaciones y está regida por el principio de finalización del cálculo. La segunda se ocupa del estudio de propiedades de los números y las operaciones (teoría de números) y está organizada a partir de la conservación de la traza de las operaciones efectuadas. Mientras que la aritmética práctica utiliza el

5. Retomamos la noción de sentido de la Teoría de Situaciones de Brousseau (1983), tal como es presentada por Charnay (1994, p. 51).

> lenguaje numérico por su poder designativo, la aritmética "algebraica", por el contrario, aprovecha el valor mostrativo de las escrituras, que constituye la característica esencial del lenguaje algebraico. Es así como, en el corazón mismo del lenguaje numérico, existe una tensión entre dos modos de funcionamiento (1984, pp. 33-34).

El vínculo entre los dos tipos de funcionamiento que mencionan los autores constituye el núcleo de las actividades que analizaremos; el complejo juego entre ellos es el nudo de las tensiones que acontecen en las aulas en momentos de entrada al hacer algebraico.

La dualidad entre un funcionamiento aritmético y un funcionamiento algebraico del lenguaje numérico comporta una diferencia de sentido que se impone sobre el signo *igual*. En la aritmética predomina un uso del signo *igual* como anuncio del resultado de una cuenta, por ejemplo $8 + 7 = 15$. Sin embargo, una igualdad del tipo $2 \times 3 + 4 = 5 \times 2$ requiere aceptar el signo igual como relación de equivalencia. El ingreso al trabajo algebraico conlleva para los alumnos un cambio de estatus con respecto al significado de dicho signo. Esta nueva significación debe agregar al sentido aritmético adquirido en la escolaridad primaria, de ser "anuncio de un resultado", el sentido evolucionado de ser "anuncio de una equivalencia".

Diversos investigadores (Barallobres, 2000; Chevallard, 1984; Sadovsky, 2003; Sessa, 2005) reconocen que para comprender las escrituras simbólicas del álgebra es necesario contemplar diferentes aspectos sobre dichas escrituras.

Drouhard (1992) recupera las nociones de denotación y sentido en Frege (1892). En Bardini (2003) se señala que para Frege un signo se compone de dos elementos: su sentido y su denotación. La *denotación* de un signo es precisamente lo que designa, y su *sentido* es su modo de denominación. La denotación establece una relación entre las escrituras y los objetos matemáticos que estas designan, por ejemplo las expresiones , 0,5, son escrituras que designan el número , es decir, su única denotación. Sin embargo, estas escrituras no recuperan las mismas relaciones y describen de maneras distintas al número , es decir, tienen diferente sentido.

La distinción entre sentido y denotación de las expresiones nos resulta relevante para profundizar el análisis de los modos de circulación de significados en torno a las escrituras numéricas que se dan en el aula, sin embargo, nos es insuficiente. Contemplar la mirada del sujeto, que observa y examina, con su repertorio de conocimientos aritméticos y su recorrido escolar nos posibilita estudiar las tensiones que se producen al interior de las aulas. Esto último refiere a la noción de connotación acuñada por Drouhard para designar la percepción y la interpretación que tiene un sujeto de una expresión algebraica (Papini, 2002).

Por último recuperamos la asociación que Borsani establece entre el sentido que un alumno otorga a una expresión y la tarea a realizar:

> [...] el sentido que une alumne da a una expresión es dinámico y depende del contexto en que esta aparece: tanto la lectura de información como la elección de las transformaciones a efectuar a una expresión dependen de la tarea a realizar. Es decir que el sentido tiene un componente pragmático asociado al "por qué" y "para hacer qué" (2023, p. 10).

Borsani, Luna y Sessa (2021) recuperan de Arcavi, Stacey y Drijvers la noción de desimbolizar, que consiste en la inspección de una expresión algebraica que es modelo de una situación extramatemática. Se trata de inspeccionarla para reconstruir su sentido en términos de la situación que se está modelizando a partir de considerar sus números y/o variables involucrados y las operaciones que los relacionan. En su artículo, los autores extienden el término *desimbolizar* para referirse a la inspección de expresiones numéricas en su relación con un contexto extramatemático. Nos parece apropiado a su vez extender aún más el alcance de esta noción de desimbolizar para analizar la inspección de una expresión numérica o algebraica como modelo de una situación intramatemática, como, en nuestro caso, estudiar la condición de una expresión de ser múltiplo de un número dado. Entendemos que la noción de desimbolizar reformula y profundiza la conducta introducida por Arcavi (1994) de leer a través de los símbolos. El autor recupera tres aspectos esenciales del trabajo algebraico que nos

interesa retener para este escrito: leer en lugar de manipular, leer para manipular y manipular para leer.

Los análisis que desarrollaremos se gestan en torno a tareas de lectura de información sobre expresiones que contienen números y operaciones. Concebimos que la acción de leer información de una expresión numérica comporta un tipo de actividad que conlleva el análisis de las cualidades del número que es denotado por medio de ella. Este análisis requiere del reconocimiento de ciertas cualidades de los otros números y las operaciones que los relacionan por medio de la expresión.

Como sucede para los alumnos que integran nuestros análisis, la acción de leer si un número natural, que es denotado por medio de una expresión numérica horizontal, es o no múltiplo de otro número natural sin recurrir a su resultado requiere de una actividad matemática particular. Lo específico de esta actividad implica reconocer o desestimar cualidades de divisibilidad en los números que componen la expresión numérica contemplando las operaciones que los relacionan.

Para el alumno, esta acción de cercanía y distancia con las particularidades de una expresión numérica supone construir un hábito de lectura que se gesta en la disposición de relaciones y conocimientos matemáticos que se construyen y estructuran en el aula. La complejidad que acabamos de describir plantea la necesidad de entablar condiciones didácticas que atiendan a ella: los alumnos deberán aprender a redirigir su posicionamiento aritmético hacia uno algebraico, movimiento que supone sucesivas adaptaciones y a su vez una reconstitución de las normas y los hábitos matemáticos y culturales construidos hasta el momento (Yackel y Cobb, 1996).

Agregamos que, en este sentido, el estudio numérico de las expresiones en el contexto de la divisibilidad comporta una entrada al álgebra a partir de un doble aprendizaje en el hacer matemático de los alumnos. Por un lado, se requiere adquirir hábitos de lectura que, como mencionamos, implican cercanía y distancia de los símbolos que componen las expresiones y, por otro, se necesita recurrir a conocimientos y propiedades de los números y las operaciones, en tanto objetos inmersos en una estructuración matemática, a fin de poder dar curso a nuevas relaciones.

Nos interesa reforzar que hablamos de un doble aprendizaje en el sentido de que sucede en dos dimensiones diferentes, aunque simultáneas. Una de ellas de constitución de prácticas algebraicas en tanto herramientas de lectura de información de las expresiones numéricas, prácticas que se fundamentan en propiedades generales sobre los números y las operaciones.[6] La otra del modo de funcionamiento general de la Matemática que fundamenta sus afirmaciones en un cuerpo estructurado y organizado de conocimientos.

3. Encuadre metodológico

Nuestro estudio se propone asumir la complejidad que implica el aprendizaje de hábitos de lectura de información de expresiones numéricas mediante el análisis de la acción del docente con relación a los problemas y la actividad matemática que despliegan los alumnos. Nos concebimos dentro de una investigación cualitativa e interpretativa que busca construir conocimiento a partir de un ida y vuelta continuo entre realidad y teoría.

Mencionamos anteriormente que nuestra investigación se vincula con la de otro grupo de investigadores y profesores que conforman, con varios de nosotros, el GL. Junto a este grupo elaboramos e implementamos una propuesta de enseñanza específica. A fines de 2019 la decisión de llevar adelante la implementación suponía un escenario de presencialidad, decisión que fue modificada y postergada por el contexto social de distanciamiento preventivo y obligatorio Covid-19 que se sostuvo hasta mediados del año 2021. Este contexto restringió la posibilidad del ingreso al aula de observadores externos, circunstancia que modificó nuestra intención inicial

6. Según Grugeon (1995), el saber algebraico se estructura alrededor de dos dimensiones, la "dimensión herramienta" y la "dimensión objeto": En la dimensión herramienta, el álgebra es herramienta para resolver problemas tanto internos como externos a la matemática y también el álgebra es una herramienta de prueba. En su dimensión de objeto, el álgebra es un conjunto estructurado de objetos: incógnitas, variables, parámetros, ecuaciones, inecuaciones, funciones, etc., dotados de propiedades, de modos de tratamientos de naturaleza formal, modos de representación que permiten esos tratamientos: escrituras algebraicas, gráficos, notaciones funcionales, etc.

de registrar las interacciones que se producían tanto en el trabajo colectivo como en el de los pequeños grupos.

A comienzos del año 2021, una docente integrante del GL implementó la propuesta en un segundo año de una escuela secundaria de la Ciudad de Buenos Aires, en dos grupos reducidos de alumnos que asistían separados semanalmente de forma alternada. Cada uno de estos grupos nos proporcionó un numeroso conjunto de datos que incluye audios que la docente elaboraba al finalizar la clase,[7] fotos de pizarrones y de producciones de los estudiantes. La construcción del dato se sostuvo a partir de un análisis articulado que conjugó los audios de la docente y las fotos de las producciones y de los pizarrones a los que teníamos acceso.

En tanto integrante del GL la docente se inscribe en una perspectiva constructivista de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En su práctica identificamos la intención de generar condiciones didácticas que permitan a los estudiantes interactuar con las tareas propuestas y producir conocimiento algebraico.

Los análisis que desarrollaremos en este trabajo recuperan los datos de implementación de la primera parte de la propuesta sobre uno de los dos grupos de estudiantes, y se complementan con los datos proporcionados por el otro grupo.

En términos de la reconstrucción didáctica de los sucesos del aula, la Teoría de Situaciones de Brousseau nos provee un modelo de interpretación de los procesos de producción matemática en el aula como procesos de adaptación cognitiva.

> Nos posicionamos en un uso de la teoría como elemento de interpretación e interpelación de lo real. Lejos de visibilizar como posible la identificación de la teoría en lo real, los casos que recortamos e interpretamos [...] son para nosotros únicos en sí, teoremas de existencia en tanto sucesos que han tenido lugar. No esperamos recortar con cada caso considerado "un caso" o "un ejemplo" presente previamente en la teoría ni mucho menos enunciar, a partir de ellos, términos o categorías de la teoría. La teoría proporciona elementos que posibilitan el recorte

7. En sus audios la docente expresa reflexiones sobre el hacer docente y el de los alumnos refiriéndose a las producciones que tuvieron lugar en el aula.

> e interpretación de un cierto hecho, el cual –a su vez– modificará para nosotros, en su singularidad, el sentido previo de esa categoría en la teoría (Cambriglia, 2018, p. 61).

Abordamos el estudio de la acción docente en relación con la actividad matemática que se desarrolla en el aula, en torno a los problemas que propone, a partir de lo que denominamos *episodios áulicos*. Brevemente, entendemos como episodio a una unidad de análisis que se configura a partir de una pregunta o conjetura que hace algún integrante de la clase, frecuentemente alumnos, la cual evoluciona en el vaivén de transacciones que tienen lugar durante el intercambio y que tiene un desenlace en términos de conclusión. Los episodios recortados se enmarcan en la perspectiva metodológica del estudio de casos desde su singularidad como proceso de existencia.

Acorde con la mirada de Stake:

> El cometido real del estudio de caso es la particularización, no la generalización. Se toma un caso particular y se llega a conocerlo bien, y no principalmente para ver en qué se diferencia de los otros, sino para ver qué es, qué hace. Se destaca la unicidad, y eso implica el conocimiento de los otros casos de los que el caso en cuestión se diferencia, pero la finalidad primera es la comprensión de este último (1998, p. 20).

En este sentido, nuestros episodios se elaboran y analizan a partir de la puesta en relación de los datos con los procesos didácticos que identificamos en la iniciación al álgebra en articulación con la aritmética, y también con los elementos teóricos que nos permiten pensarlos. El análisis delimita de manera dialéctica, y a partir de un sucesivo contacto con los datos, los episodios con relación a las inferencias didácticas sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje recortados, a fin de poder estudiar las complejidades que implican.

A partir del análisis de los tres episodios que siguen, nos detendremos en algunos aspectos de los procesos de producción del aula que se vinculan con la enseñanza de hábitos de lectura y de transformación de escrituras numéricas.

3.1. Los episodios

Este escrito recupera y analiza lo que acontece en el aula en las actividades de la propuesta que siguen a un primer trabajo de los alumnos con un problema en contexto extramatemático. Este primer problema en contexto extra dio lugar a que la docente gestione la introducción de escrituras numéricas horizontales al recuperar los cálculos producidos por los estudiantes; en particular, comienzan a circular en el aula escrituras horizontales aditivas que incluyen entre sus sumandos números múltiplos de 6 y escrituras multiplicativas que enfatizan el número 6 como factor de aquellos números múltiplos de 6.

Según los diseños curriculares de la Ciudad de Buenos Aires, la noción de múltiplo es un contenido central del trabajo aritmético de la escuela primaria, a partir de la cuenta de dividir con resto cero o la tabla de multiplicar. Sin embargo, su relación con la estructura multiplicativa, divisor por cociente, requiere de momentos de reflexión en este nivel de la enseñanza que habiliten a los alumnos a considerar las expresiones numéricas horizontales como objetos del aula de matemática.

Las escrituras numéricas horizontales serán el objeto de estudio principal en los problemas de la primera parte de la propuesta y la lectura de información que ellas portan será la tarea privilegiada. En este sentido, la aparición de ellas en el espacio social del aula, a partir de que la docente recupera la información que contienen en el problema en contexto extra, tiene la intención didáctica de iniciar un proceso de devolución[8] de la tarea de lectura de expresiones en los siguientes problemas. El nudo de los episodios que conforman este artículo se gesta en torno a los problemas intramatemáticos iniciales de la propuesta.

Reconstruimos a continuación un episodio en el que la docente sostiene en el aula una reflexión en torno a la lectura de una expresión numérica multiplicativa. La profesora crea puentes con la experiencia aritmética de los alumnos construida en la escuela primaria y considera la descomposición de un número A en factores como recurso para decidir si el número A es o no múltiplo de otro número.

8. El término *devolución* es un concepto didáctico acuñado por la Teoría de Situaciones de Brousseau.

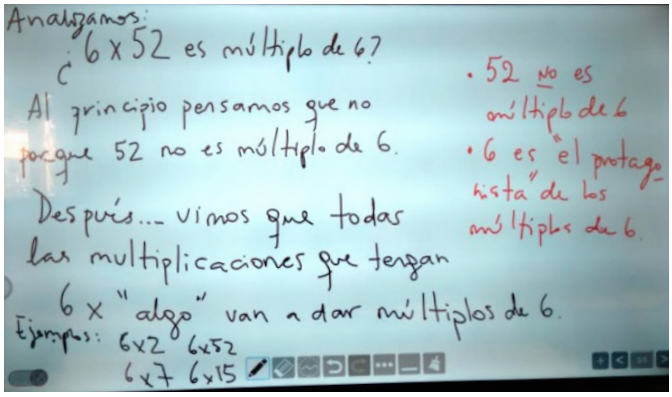
3.1.1. Episodio 1: "6 × 52... pero 52 no es múltiplo así que no... o sea que no, no y no"

En este episodio recortamos un momento en que la profesora propone en el aula la tarea de decidir, sin hacer la cuenta, si 6 × 52 es múltiplo de 6. Los alumnos dudan inicialmente, el producto involucra un factor que no es múltiplo de 6, y ello parece ser motivo suficiente para responder que no. Interpretamos que, en este tipo de respuestas, los alumnos ponen en juego relaciones generadas a partir de extender erróneamente al campo multiplicativo propiedades de divisibilidad que eran válidas para la suma de números. Como dijimos previamente, la lectura matemática de una expresión numérica requiere poner en relación propiedades aritméticas generales vinculadas a las operaciones que conforman la expresión numérica dada y cualidades específicas de la expresión en términos de las operaciones y los números que la componen.

La profesora convoca a los alumnos a construir elementos que den lugar a establecer esta relación y, en este sentido, asume una gestión desafiante dando lugar a la articulación entre el conjunto de conocimientos aritméticos disponibles para los alumnos y el inicio a un hacer algebraico sobre lo numérico.

La Figura 1 es la foto que nos permite reconstruir –junto con el audio– el momento colectivo en el que la profesora discute junto a los alumnos este asunto nuevo para el aula.

Figura 1. Pizarrón que registra momentos del espacio colectivo respecto del episodio 1



A continuación, transcribimos un fragmento de audio de la profesora en el que relata, luego de la clase, la discusión colectiva que se dio en torno a esta tarea. L, S, J son alumnos a quienes hace referencia en su relato.

> [1] Bueno agarré entonces y puse 6 × 52, y dije bueno ¿eso es múltiplo de 6? haciendo referencia a la expresión 6 × 52 y dijeron "Ahí tenés el 6 que es múltiplo y el 52 no es múltiplo [...]". Dije: ¿están todos de acuerdo entonces en que 52 no es múltiplo de 6? Bueno, listo, y lo escribí ahí al costado en rojo a la derecha del pizarrón. Y 6 sí es múltiplo de 6 y quedó escrito ahí, 6 es el protagonista de los múltiplos de 6. Porque eso lo dijo S y me gustó, bueno lo escribí así para que fuera más gracioso.
> [2] Entonces ¿el resultado de esa cuenta no es múltiplo de 6 porque 52 no es múltiplo de 6? Y en un momento alguien dijo: "no, sí va a ser porque lo estás multiplicando por 6" y bueno ahí fue como un momento de pensar. Fue como que hubo un quiebre. Hubo un momento en el que S, por ejemplo, se quedó pensando, quizás un poco en silencio.
> [3] L decía que iba a ser múltiplo de 6. J decía que no, pero, a partir del comentario de L, se quedó pensando también. Y entonces S dijo: "no, pero igual 6×52... pero 52 no es múltiplo así que no... o sea que no, no y no".
> [4] Entonces yo escribí ahí abajo, que no quedó registrado en el pizarrón. Dije ¿el resultado de 6 × 7 es múltiplo de 6? Sí,... ni siquiera fueron al resultado, al menos no se habló del resultado de 6 × 7, es decir del número 42 no se habló. Bueno pero ¿es múltiplo de 6? Dijeron que sí. ¿Está en la tabla del 6? Sí, nuevamente, ¿en qué fila está?... si yo voy a la columna del 6 ¿en qué fila encuentro al 6 por 7? Respondieron en la fila siete de la tabla del 6. Entonces ahí volvimos sobre la tabla pitagórica[9]... y pero el 7 no es múltiplo de 6...
> [5] Entonces dijeron: "No, bueno, pero estoy haciendo 6 por...". Entonces como que lo pensamos a partir del 6 × 7. Y después ahí fue cuando S dijo esto que después

9. La tabla pitagórica es un recurso numérico usado en el nivel primario y principios del nivel secundario de Argentina. Es una tabla de diez filas y diez columnas. El número que ocupa el lugar de la fila a, columna b es a×b; a y b números naturales entre 1 y 10.

él me dictó y yo escribí mientras él me dictaba (refiere al pizarrón de la Figura 1).
[6] Vimos que todas las multiplicaciones que tengan 6 por algo, yo acá había puesto puntos suspensivos y él me había dicho algo ahí refiriéndose al 6 por algo. ¿Pongo puntos suspensivos o pongo "algo"? Algo (la profesora refiere a la respuesta de S), bueno 6 por algo va a dar múltiplo de 6.
[7] Entonces volviendo un cachito para atrás dijimos que con 6 × 7 pasaba lo mismo que con 6 × 52, eran números de la tabla del 6, 6 × 7 está en la fila siete, el 6 × 52 está en la fila 52. Y nada, quedó ahí.

De la transcripción de este audio nos interesa fundamentalmente recuperar aquellas marcas que expresan una posible concepción inicial de los alumnos, errónea, de que el producto entre dos factores, uno múltiplo de 6 y el otro no, denotará un número que no es múltiplo de 6. Esta concepción motoriza primeras respuestas en torno a la lectura de información de expresiones numéricas multiplicativas ([1]; [3]), y despliega acciones de la profesora para establecer conexiones entre los conocimientos disponibles de los alumnos sobre la noción de múltiplo y una nueva práctica de lectura. Este nuevo hacer requiere que los estudiantes puedan inferir cualidades del número que denota una expresión numérica multiplicativa a partir de ponderar las cualidades de cada uno de los números que conforman sus factores.

La docente sostiene y reconecta sentidos elaborados por los alumnos en el campo aritmético frente a la concepción errónea que parece vivir en el aula. Recurre a la estructura multiplicativa de un número de la tabla no extendida[10] (6 × 7) para retomar la pregunta sobre la expresión inicial (6 × 52). Repone en el aula un número cercano al repertorio de cálculo de los alumnos, denotado por un producto con uno de sus factores no múltiplo de 6 (6 × 7), para sembrar una posible contradicción. Esta acción le permite establecer vínculos con la tabla pitagórica, que ahora extiende, y recuperar sentidos de los factores como posibles filas de la tabla.[11] La

10. Llamamos tabla no extendida a la tabla de multiplicar que consta de los múltiplos de 7 hasta 7×10.

11. La profesora se apoya en relaciones numéricas construidas en el nivel primario como recurso para dar lugar a estrategias de lectura.

tabla de multiplicar, adquirida en los primeros contactos de los alumnos con la multiplicación en la escuela primaria, sus filas, la noción de "ser múltiplo de 6", son sentidos que vuelven para dar soporte a la construcción de nuevos elementos de lectura sobre las expresiones.

La escritura horizontal multiplicativa permite trazar vínculos en el aula entre "ser múltiplo de 6", su estructura multiplicativa "6 ×" y estar en la tabla del 6. La profesora tracciona para que se desplieguen e integren sentidos diferentes de la noción de múltiplo. Esta articulación de las diferentes formas de atrapar el concepto de "ser múltiplo de 6" que tiene lugar se configura en un nuevo conocimiento que habilita estrategias de lectura para decidir si un número, denotado a partir de una expresión numérica multiplicativa, es o no divisible por 6.

Nos interesa retener un conocimiento que comienza a instalarse en el aula sobre las expresiones de ciertos números naturales y las cualidades que ellas ponen en evidencia. Enunciada con nuestras palabras: "toda expresión numérica de la forma c × A es múltiplo de c". Este conocimiento recupera el sentido aritmético de que un número sea múltiplo de otro a partir de su estructura multiplicativa. En lo que sigue referiremos a este conocimiento como *Conocimiento H*.

El siguiente episodio recupera un momento de la clase en el que la docente propone la búsqueda de una expresión equivalente a un número o a una expresión dada que, a partir de la explicitación de una estructura multiplicativa o de términos constituidos por dichas estructuras, permita fundamentar que el número o la expresión considerada es múltiplo de otro número. En esta búsqueda la docente recupera un sentido fundamental de la multiplicación entera: el cociente es la cantidad de veces que hay que sumar el divisor para configurar el dividendo.

El Conocimiento H dio elementos para poder leer características de un número denotado a partir de una expresión numérica multiplicativa, este nuevo conocimiento, intrínsecamente ligado al anterior, aporta la posibilidad de producir una expresión multiplicativa de un número para poder asegurar sus cualidades.

3.1.2. Episodio 2: Se puede escribir como 6 × "algo"

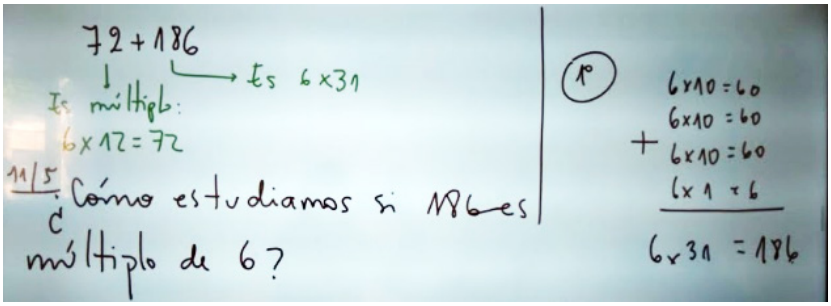
El momento colectivo que pondremos en escena sucede con relación a la discusión de si el número 72 + 186 es múltiplo de 6.

Reconstruimos a continuación este proceso, relatado a partir de un audio de la profesora, en el que ella describe la producción del alumno F, quien recurre a una escritura multiplicativa del número 186. Señala que este alumno expresa frecuentemente los números presentes en las expresiones numéricas de los problemas a partir de escrituras multiplicativas. F parece entender este hacer como una acción a realizar en el aula pero sin saber necesariamente para qué. Interpretamos que esta falta de razones no le permite controlar cuáles escrituras multiplicativas le resultan convenientes y cuáles no para argumentar la divisibilidad.

La reconstrucción de la profesora da marcas de su intención de exponer en el pizarrón ciertas estrategias de descomposición de los alumnos para hacer visible que el factor 31 recupera la cantidad de veces que aparece el 6 aditivamente en el número 186.

> [1] Pero vos, F, ¿Cómo sabes que 186 es 6 × 31?, porque no está en la tabla que uno sabe de memoria, ¿no? 6 × 31 lo tengo que pensar un poco. Entonces... bueno... aparece también bastante esto de mentalmente como si fuera hago la cuenta o lo hago mentalmente, les cuesta un poco [analizar] qué hay mentalmente, qué hice mentalmente.
>
> [2] Insistiendo un poco en eso apareció lo que yo escribí al principio, lo había escrito como tomando un poco nota, pero sin darle una entidad. Lo puse ahí al costado, él dijo: "bueno, yo hice 6 × 10 varias veces hasta que me acerqué 6 × 10, 6 × 10 y 6 × 10, tres veces y después le sumó 6 y ya llegué al 186 justo" y entonces yo le dije: "Bueno ¿y el 31?", porque entonces esto de acercarme por múltiplos de 6 me lleva a decir que es múltiplo de 6 pero por qué decís que es 6 × 31, bueno el 31 está en la suma de esta cantidad de veces. Eso se dijo y está bueno porque no había aparecido, [...] este 31 no es transparente para todos.

Figura 2. Pizarrón que recupera el momento colectivo al trabajar la pregunta de si la expresión 72 + 186 es múltiplo de 6



El pizarrón, en vínculo con la reconstrucción que hace la profesora del momento colectivo, expone la pregunta que se hace a la clase de cómo estudiar si 186 es múltiplo de 6 y ofrece marcas del armado colectivo de esa respuesta. La "cuenta" que aparece a la derecha tiene un formato especial. En ella se combinan lo que en el audio se relata como aproximaciones de un alumno al número 186 a partir de sumas de múltiplos de 6, la expresión 6 × 31 que había traído un alumno y la puesta en relación de la profesora en el espacio colectivo para arribar a las 31 veces 6.

Nos parece importante destacar que en el aula el número 186 es considerado múltiplo de 6, no hay duda acerca de que lo es. La intención de la docente es instalar en el espacio colectivo de la clase la búsqueda de una escritura multiplicativa que evidencie el factor 6 partiendo de esa certeza. La transformación ingresa así en el aula como un recurso para expresar de otra manera a un número que es múltiplo de 6.

Será una proyección a futuro proponer en el aula tareas que movilicen en los alumnos la necesidad de transformar una expresión para luego poder estudiar sus cualidades mediante la lectura de información sobre la expresión transformada.

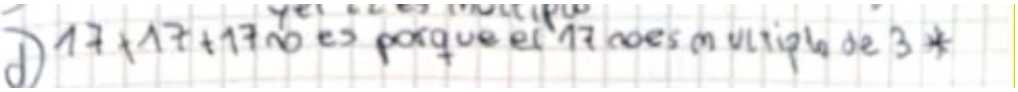
El episodio que sigue ilustra el accionar docente a partir de un lugar más silencioso desde el punto de vista de los sonidos medibles del aula pero más estridente en términos de una perspectiva de enseñanza. En él la docente apuesta a las posibilidades de los alumnos con confianza en las construcciones que

habían tenido lugar en el aula. Recuperamos las producciones de dos estudiantes que configuran sus escritos a partir de incorporar expresiones numéricas horizontales nuevas como herramienta para argumentar la divisibilidad de un número por otro.

3.1.3. Episodio 3: "Hacemos trampa"

L y F es la referencia en este episodio a dos estudiantes que trabajaron juntos con el problema: "Sin obtener el resultado de la cuenta decidir si el número 17 + 17 + 17 es múltiplo de 3".

Figura 3. Producción inicial de los alumnos L y F: "17 + 17 + 17 no es porque el 17 no es múltiplo de 3"



Al acercarse a estos alumnos, la profesora advirtió que su respuesta era que 17 + 17 + 17 no era múltiplo de 3 por la cualidad del número 17 de no ser múltiplo de 3. Entonces les permite "hacer trampa" usando el resultado de la cuenta, aun cuando la consigna lo limita. "Hacer trampa" fue una expresión impulsada por la docente para permitir a los alumnos calcular el resultado. Su finalidad era dar lugar a una contradicción ante una respuesta incorrecta.

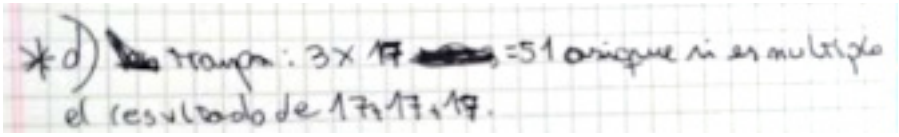
Utilizando el resultado 51, L y F responden que "el número de la cuenta es múltiplo de 3". Tal respuesta podría deberse a diferentes conocimientos aritméticos disponibles al interior del grupo, mencionamos algunos posibles:

- encontrar al número 51 en la tabla pitagórica extendida del 3;
- hacer la cuenta de división por 3 y ver que tiene resto 0;
- hacer la cuenta de división por 3 por medio del uso de la calculadora y observar que el cociente "es un número sin coma";

- descomponer el número 51 como suma de múltiplos de 3 conocidos por ejemplo 30 y 21; o
- utilizar el criterio de divisibilidad por 3.

La acción de la docente al permitir "hacer trampa" promueve un movimiento de los alumnos desde su respuesta inicial hasta la que establecen finalmente. Advertimos también que, luego de cambiar de opinión, L y F dejan escrito el número 51 como 3 × 17 dando lugar a una nueva forma de expresar a ese número que evidencia el factor 3.

Figura 4. Producción posterior de los alumnos L y F: Trampa: 3 × 17 = 51 así que sí es múltiplo el resultado de 17 + 17 + 17



En sus carpetas quedan las marcas de tres sentidos[12] diferentes del número 51, 3 × 17, 17 + 17 + 17 y 51 (Figura 4). Interpretamos que para L y F el hecho de incorporar una escritura multiplicativa horizontal del número 51, aun al hacerlo *a posteriori* de obtener la certeza sobre su divisibilidad, expresa una primera marca de disponibilidad de la escritura "3 por" como herramienta argumental del hecho de "ser múltiplo de tres". Los alumnos no parecen disponer aún de la transformación de 17 + 17 + 17 como 3 × 17 para luego leer en la expresión multiplicativa la divisibilidad por 3 de la expresión inicial, pero a partir de las prácticas construidas en el aula sí parecen reconocer que la escritura "3 por" es una razón de que un número es múltiplo de 3. Este conocimiento se puso en análisis en la escena del aula que conformó el episodio 2 de este artículo. De este modo, la escritura explicitada por estos alumnos *a posteriori* de la certeza sobre la divisibilidad

12. Frege (1892), citado por Drouhard (1992), distingue entre sentido y denotación de las expresiones.

por 3 de la expresión 17 + 17 + 17 refuerza en el aula un primer sentido de la equivalencia. La potencia de la equivalencia de expresiones, para dar respuesta a la solicitud del problema, brinda elementos para poder dar lugar a futuro a las transformaciones de expresiones como herramientas para la lectura.

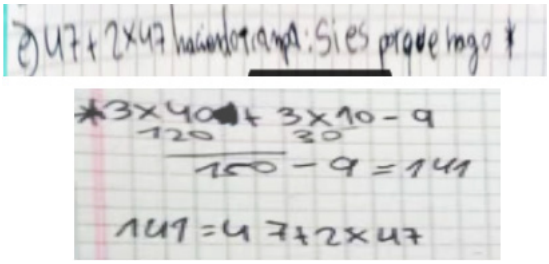
Nos parece oportuno analizar el acto de la docente de permitir "hacer trampa" en el contexto de un hacer didáctico que estimula la reflexión con los alumnos sobre el uso de las escrituras que circulan en el aula.

Su práctica usual consiste en seleccionar producciones de los estudiantes, recuperarlas en el espacio colectivo y favorecer el intercambio en torno a las distintas estrategias. En ocasiones, durante estos intercambios, la docente utiliza la referencia a "hacer trampa" para señalar en el discurso de los estudiantes razonamientos de carácter aritmético, centrados en la obtención de resultados, y distinguirlos de otros que se apoyan en el uso de propiedades de los números y de las operaciones. Mediante esta acción docente promueve el análisis de las respuestas de los alumnos a partir de la búsqueda de nuevas escrituras horizontales equivalentes a otras dadas y su lectura.

Al inicio de este artículo nos referimos a la necesidad de asumir la complejidad didáctica que implica la entrada al pensamiento algebraico. El movimiento que los alumnos deben aprender a hacer desde un posicionamiento aritmético, al interactuar con expresiones numéricas, hacia un posicionamiento algebraico requiere de la reconstitución cultural en el aula de los hábitos ya instalados. En este sentido, la práctica de la docente al incluir "la trampa" como gesto de reflexión sobre las escrituras se inscribe en una perspectiva de generar condiciones didácticas específicas para favorecer un medio de aprendizaje algebraico sobre lo numérico para los estudiantes.

A continuación, L y F abordan otra pregunta de este problema "Sin obtener el resultado de la cuenta decidir si el número $47 + 2 \times 47$ es múltiplo de 3". En un principio, los alumnos tampoco pueden decidir si la expresión es o no múltiplo de 3, pero, se permiten "hacer trampa", esta vez sin mediar con la profesora. Es decir, L y F hacen inicialmente la cuenta, utilizan el resultado 141 para responder si 141 es o no múltiplo de 3 y luego continúan a partir de ello. Al obtener que 141 es efectivamente múltiplo de 3, L y F buscan dejar registro de esta cualidad en su respuesta escrita mediante la exhibición de una descomposición aditiva de múltiplos de 3.

Figura 5. Producción de los alumnos L y F: 47 + 2 × 47 hicimos trampa. Si es porque hago * * 3 × 40 + 3 × 10 - 9



Estos alumnos se aproximan al número 141 por medio de sumas y restas de los números 120, 30 y 9, múltiplos de 3 que les son familiares, dando lugar a 3 × 40 + 3 × 10 - 9. Esta escritura horizontal, elaborada por los estudiantes como explicación para responder luego de "hacer trampa", es más sofisticada que en el caso anterior e incorpora sumas y restas de términos que expresan evidenciando el factor 3.

En las dos producciones consideradas en este episodio, L y F producen una nueva expresión numérica que conserva la traza de las operaciones como un elemento de argumentación de la divisibilidad por 3 del número que denota dicha expresión. Lo realizado con el problema que incluía la expresión 17+17+17, les da elementos para "darse permisos", que antes había otorgado la docente, y recurrir a otras vías: cuenta de dividir, la trampa, etc. Nos resulta también importante destacar que las expresiones que los alumnos producen para argumentar adquieren mayor sofisticación y presencia en sus carpetas a medida que las expresiones horizontales se consolidan y sostienen en las prácticas de discusión colectiva.

Finalmente nos parece indispensable señalar que la acción de la docente, al habilitar a los alumnos recurrir al resultado, genera condiciones en el aula para la vida de un estadio intermedio en el aprendizaje algebraico sobre lo numérico, una entrada de la transformación numérica que recurre al repertorio aritmético de los alumnos. Este estadio intermedio deberá evolucionar hacia transformaciones directas que favorezcan a futuro la transformación de expresiones algebraicas del tipo x+2x=3x, sin embargo, consideramos que es un momento necesario para que la transformación ingrese en el aula con un sentido vinculado

a la tarea: en estas instancias para muchos alumnos se transforma después, para comunicar una lectura.

4. Reflexiones finales

En este artículo recorrimos tres episodios que recuperan marcas de la producción matemática que acontece en el espacio colectivo o en instancias de trabajo en pequeños grupos. Nuestros análisis consideran esas marcas poniendo especial relevancia en la acción de la docente como actor central en el acompañamiento de los alumnos en la transición desde prácticas aritméticas a prácticas algebraicas.

En los dos primeros episodios, en un contexto de tareas que propone un trabajo algebraico sobre lo numérico, se construyen en el aula dos conocimientos sobre la divisibilidad de un número asociados al sentido que le imprime una expresión multiplicativa que lo denota:[13]

- el número 6 × A, con A número natural, es múltiplo de 6, cualesquiera sean las cualidades de divisibilidad de A;
- todo número múltiplo de 6 se puede expresar como 6 × A, con A número natural.[14]

Los conocimientos que acabamos de enunciar retoman sentidos de la multiplicación elaborados en la escuela primaria y enfatizan su relación con la estructura multiplicativa que la define. Este vínculo no es natural en el aula sino que se gesta por las condiciones que favorece la acción intencionada de un docente. Bajo este accionar, la noción aritmética de "ser múltiplo de" refuerza su sentido conceptual en el aula dando posibilidades para la construcción de elementos de

13. En el aula estos conocimientos convivieron con otras enunciaciones, y algunos de manera implícita.

14. En el aula se pusieron en juego generalizaciones de los conocimientos mencionados para valores diferentes de 6.

lectura y transformación que podrán ser reinvertidos en la lectura de expresiones algebraicas.

El último de los episodios presenta una escena en la que se articulan diferentes expresiones que denotan un número y las posibilidades de los alumnos de recurrir a diferentes sentidos de esas expresiones para elaborar argumentaciones. La docente genera un movimiento en el aula por medio del acto de habilitar "hacer trampa" que, a partir del uso del resultado, da lugar en la clase a la aparición de escrituras numéricas equivalentes con un grado progresivo de sofisticación.

Nos parece preciso reiterar que son las relaciones con el campo aritmético construidas por los estudiantes en su tránsito por la escuela primaria las que, en un ambiente didáctico que las fomente, operan como reguladoras en la construcción de nuevas relaciones matemáticas que enmarcan un trabajo algebraico sobre lo numérico. Este trabajo será antecedente de un futuro trabajo algebraico sobre las expresiones que incluyan variables.

En las tareas que configuran nuestros episodios, el contexto intramatemático de la divisibilidad permite aportar sentidos que el álgebra aún no puede aportar a los alumnos porque no la disponen. En este sentido, Chevallard (1989) plantea la funcionalidad del álgebra elemental como herramienta para producir conocimiento sobre un cierto dominio y, en el caso de aquellos dominios intramatemáticos, el álgebra favorece el estudio de los sistemas de números. Nos permitimos citar a Sadovsky, que hace referencia a la fertilidad que la contextualización de una situación aporta para la actividad matemática del aula. Si bien la autora lo expresa para un contexto extramatemático, nos parece oportuno extenderlo al interior de la propia matemática:

> [...] la contextualización en una situación que los alumnos pueden comprender independientemente del conocimiento del modelo matemático que puede describirla, y acerca de la cual pueden establecer algunas relaciones, contribuye a la construcción de ese modelo (Sadovsky, 2005, p. 101).

La evocación de sentidos y relaciones constituidos en el campo aritmético, y las restricciones que impone el docente a fin de generar relaciones en el campo algebraico resultan un pilar fundamental para traccionar la construcción de hábitos

de lectura de información y transformación de las expresiones numéricas. En este hacer "nuevo" sobre objetos "con sabor añejo" se imprimen nuevos sentidos: el signo *igual* entre escrituras diferentes encarna la equivalencia de expresiones que conservan la denotación variando su sentido; la expresión numérica se constituye como objeto de la clase a la cual se le puede extraer información sin calcular su resultado; las propiedades que estaban condensadas en portadores de la escuela primaria comienzan a ser contenido necesario para fundamentar argumentos de lectura. Esta ruptura de la continuidad, necesaria para los alumnos en el ingreso a un trabajo algebraico sobre lo numérico, precisa de actos docentes que oscilen entre permisos y no permisos alojados en la bisagra entre los hábitos aritméticos y los hábitos algebraicos.

Sabemos bien que el tránsito a las prácticas por las que estamos apostando requiere de una acción docente que lo habilite a la vez que lo sostenga mediante intervenciones variadas y adaptadas a los conocimientos que afloran en el aula. Es el soporte contractual enmarcado en la intencionalidad docente lo que permite restringir prácticas aritméticas creando un medio propicio que alberga prácticas algebraicas sobre las expresiones numéricas. A su vez, el soporte del ámbito social del aula posibilita nuevas relaciones que se alojan en lenguajes y modos de decir aún imprecisos pero cargados de significaciones locales.

Finalmente, nos interesa recortar un asunto mencionado al interior de este texto: la adquisición de estrategias de lectura sobre expresiones numéricas comporta a su vez adquirir formas de relación nuevas con los símbolos que las componen, distinguir cualidades de algunos números u omitirlas y, también, recurrir a conocimientos y propiedades para poder dar curso a nuevos enunciados sobre esas expresiones. Hablamos al inicio de un doble aprendizaje en el hacer matemático de los alumnos, aunque simultáneo. Uno de constitución de las técnicas de transformación como herramientas para la lectura de información de las expresiones numéricas. Otro que proporciona elementos para acercar a los alumnos al modo de funcionamiento general de la Matemática, que avanza a partir de conjeturar y afirmar nuevas relaciones sobre los objetos matemáticos, y que requiere fundamentarse en un cuerpo estructurado y organizado de conocimientos, como, en este caso, el de las propiedades de los números.

Referencias

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 24-35.

Arcavi, A., Drijvers, P. y Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of algebra: Ideas, insights, and activities*. Routledge.

Barallobres, G. (2000). "Algunos elementos de la didáctica del álgebra". En G. Chemello (ed.), *Estrategias para la enseñanza de la Matemática* (pp. 91-114). Universidad Virtual de Quilmes.

Bardini, C. (2003). Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique [Tesis doctoral]. Université Paris, Diderot, Paris VII. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011697

Borsani, V. (2023). *La diversidad de conocimientos aritméticos de les estudiantes en el tránsito hacia una práctica algebraica* [Tesis de maestría]. Universidad Nacional de La Plata. https://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/167326

Borsani, V., Luna, J. y Sessa, C. (2021). El valor mostrativo de las expresiones numéricas: Tensiones entre las escrituras de los estudiantes y las que ofrece el docente. *Revista Científica EFI*, *7*(12), 29-47.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Springer.

Cambriglia, V. (2018). *Emergentes Colectivos de Generalización* [Tesis doctoral]. Universidad de Buenos Aires.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, (40), 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Charnay, R. (1994). "El álgebra como punto de vista: Problemas didácticos". En B. Grugeon (Ed.), *Didáctica del álgebra* (pp. 11-30). Paidós.

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. *Petit X*, (5), 51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. *Petit X*, (19), 43-72.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. *Petit* X, (23), 5-38.

Drouhard, J. P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire* [Tesis doctoral]. Université Denis Diderot.

Grugeon, B. (1995). *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement: BEP et Première B* [Tesis de Doctorado]. Université Paris.

Papini, M. C. (2002). *Algunos aportes de la psicología de Vygotsky a la problemática didáctica de los primeros aprendizajes del álgebra elemental* [Tesis de maestría]. Facultad de Ciencias Humanas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Sadovsky, P. (2003). *Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas* [Tesis doctoral]. Universidad de Buenos Aires.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy: Miradas, sentidos y desafíos*. Libros del Zorzal.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: Orígenes y perspectivas*. Libros del Zorzal.

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Morata.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education*, *27*(4), 390-408. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.27.4.0458

Recepción: 09/06/2026

Aceptación: 25/09/2026