Rodolfo Murúa,* Horacio Itzcovich, Verónica Grimaldi,***Daniel Arias**** y Camila Hourcade*****

La relación entre el arrastre, el comportamiento y la dependencia en un entorno de geometría dinámica a partir del estudio de un caso

RESUMEN

En el presente artículo reflexionamos sobre algunos asuntos que emergieron al incluir el programa GeoGebra en distintas instancias de formación docente sobre la enseñanza de la geometría, brindadas por la Universidad Pedagógica Nacional (UNIPE). En particular, nos preguntamos: ¿qué potencialidad didáctica podría adquirir el tratamiento del vínculo entre *procedimiento de construcción*, *relaciones de dependencia*, *arrastre* y *comportamiento*?

Para abordar esta investigación analizamos diversas interacciones entre los y las estudiantes, y/o con las y los profesores, que emergieron en las aulas a raíz de las actividades de construcción de figuras que se planificaron para aproximar respuestas a nuestras preguntas de investigación.

Concretamente, nos proponemos estudiar las relaciones de dependencia que se establecen entre los elementos de una construcción realizada con GeoGebra y su incidencia tanto en el arrastre como en el comportamiento. Estas particularidades son propias de un entorno de geometría dinámica y resultan "invisibles" al trabajar con lápiz, papel e instrumentos geométricos.

PALABRAS CLAVE

Geometría • GeoGebra • arrastre • comportamiento

* Profesor de Enseñanza Media y Superior en Matemática (UBA), especialista en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria (UNIPE) y doctor en Ciencias de la Educación (UBA). Actualmente se desempeña como profesor e investigador en la UNIPE. Sus investigaciones se focalizan en la enseñanza de la geometría mediante la utilización del programa GeoGebra. Filiación: UNIPE, CABA, Argentina. Orcid: https://orcid.org/0000-0003-1797-164X?lang=en. Correo electrónico: rodolfo.murua@unipe.edu.ar

Revista Argentina de Investigación Educativa
vol. V • nro.10 • diciembre de 2025 • pp. 61-90
RAIE

The relationship between drag, behavior, and dependence in a dynamic geometry environment from a case study

ABSTRACT

In this article, we reflect on some issues that emerged when including the GeoGebra software in various teacher education courses on geometry offered by the National Pedagogical University (UNIPE). In particular, we ask: What didactic potential could the treatment of the link between construction procedure, dependency relationships, dragging, and behavior acquire? To address this research, we analyzed various interactions between students and/or teachers that emerged in the classrooms as a result of the figure construction activities planned to approximate answers to our research questions.

Specifically, we propose to study the dependency relationships established between the elements of a construction made with GeoGebra and their impact on both drag and behavior. These particularities are characteristic of a dynamic geometry environment and are "invisible" when working with pencil, paper and geometric instruments.

KEYWORDS

Geometry • GeoGebra • drag • behavior

** Profesor de Enseñanza Media y Superior (UBA), especialista en Enseñanza de las Ciencias Experimentales y Matemática (UNSAM). Actualmente se desempeña como coordinador de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para el Nivel Primario e investigador en la UNIPE. Sus investigaciones se focalizan en la enseñanza de la geometría mediante la utilización del programa GeoGebra. Filiación: UNIPE, CABA, Argentina. Orcid: https://orcid.org/0000-0003-4189-8593. Correo electrónico: horacio.itzcovich@unipe.edu.ar

*** Profesora en Física y Matemática y especialista en Educación en Ciencias Exactas y Naturales (UNLP). Se desempeña como profesora e investigadora en UNLP y UNIPE. Sus investigaciones se focalizan en la educación matemática inclusiva (UNLP) y la enseñanza de la geometría con GeoGebra (UNIPE). Filiación: UNIPE, CABA, Argentina. Orcid: https://orcid.org/0000-0003-1314-0494. Correo electrónico: veronica.grimaldi@unipe.edu.ar

**** Profesor en Matemática, profesor en Física (ISFDyT Nº 24) y Licenciado en Educación (UNQ) dedicado a la formación docente en todos los niveles de enseñanza y actualmente focalizado en la posformación en nivel primario y superior. Se desempeña como profesor e investigador en la UNIPE y en Institutos de Formación Docente del conurbano bonaerense. Filiación: UNIPE, CABA, Argentina. Correo electrónico: daniel.arias@unipe.edu.ar

***** Profesora de tercer ciclo de la EGB y de la Educación Polimodal en Matemática (ISFDyT Nº 24). Se desempeña como profesora en Institutos de Formación Docente de la Provincia de Buenos Aires (ISFDyT Nº 24 e ISFD Nº 50) y como JTP en la UNIPE. Filiación: UNIPE, CABA, Argentina. Correo electrónico: camila.hourcade@unipe.edu.ar

INTRODUCCIÓN

En este artículo nos proponemos compartir ciertos interrogantes y conceptualizaciones que elaboramos en nuestro equipo de investigación a raíz del análisis de producciones e intercambios con los y las estudiantes[1] del Seminario Geometría, correspondiente a la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria y de la materia Geometría del Profesorado en Matemática de la UNIPE. Algunos aspectos del trabajo en este contexto aparecen desarrollados en Itzcovich y Murúa (2018, 2022a, 2022b) y en Arias *et al.* (2022). Tanto en esos trabajos como en el presente artículo nuestro foco está puesto en diferentes tensiones que emergen cuando se incorpora el *software* GeoGebra en el aula en los procesos de enseñanza de la geometría.

A partir de los debates que se fueron desarrollando al interior del equipo de investigación en torno a las producciones de los y las estudiantes y los intercambios que sucedieron en las aulas –y que fueron considerados durante el desarrollo de los proyectos de los años 2018-2020, 2021-2022 y 2023-2024–[2] surgieron nuevos interrogantes sobre ciertos aspectos del trabajo en un entorno de geometría dinámica (EGD) y que podemos sintetizar mediante las siguientes preguntas: ¿qué relaciones es posible establecer entre el comportamiento[3] de los elementos de una construcción geométrica, la dependencia entre ellos y las variables involucradas? ¿Qué potencialidad didáctica podría adquirir para la formación docente el tratamiento del vínculo entre procedimiento de construcción, relaciones de dependencia, arrastre y comportamiento? Identificar estas relaciones se tornó, así, en asunto de exploración y conceptualización al interior del equipo de investigación.

Partimos de reconocer que las construcciones con programas de geometría dinámica instalan un aspecto novedoso en el trabajo geométrico, bastante estudiado por diferentes autoras y autores (Capponi, 2000; Healy, 2000; Laborde y Capponi, 1994; Laborde, 1995, 1997; Restrepo, 2008): el movimiento que se les puede impregnar a las representaciones de los objetos geométricos que se construyen. Cuando se utiliza este tipo de *software*, las construcciones geométricas evidencian características que podrían ser diferentes a las de la geometría de lápiz y papel. Una de ellas es que el orden seguido en un procedimiento de construcción

1 Los y las estudiantes de la Licenciatura son maestras y maestros en ejercicio.

2 Se trata de tres proyectos de investigación que remiten a la inclusión del programa GeoGebra en los procesos de enseñanza de la geometría: Conocimientos matemáticos-didácticos que emergen a propósito del trabajo geométrico en el marco de un proceso formativo de maestros y maestras de nivel primario que incorpora el GeoGebra (CS 52/18-Unipe), Problematización de la enseñanza de la geometría en el marco de un proceso formativo de maestros y maestras de nivel primario que incorpora el uso de GeoGebra (CS 10/21-Unipe) y La inclusión de un programa de geometría dinámica para la enseñanza de la geometría en la escuela primaria: continuidades y rupturas con el trabajo en lápiz, papel e instrumentos geométricos (CS 89/23-Unipe).

3 Al comienzo del artículo utilizamos el término *comportamiento* de manera intuitiva. En el marco teórico presentamos la definición de Talmon y Yerushalmy (2004) y a partir del estudio de un episodio de clase proponemos una nueva definición.

define una direccionalidad entre las relaciones geométricas que se establecen. Así el *comportamiento* de la construcción queda determinado por dicho orden y dejarían de cumplirse propiedades tales como la simetría en relación al movimiento. Por ejemplo, el hecho de trazar dos rectas paralelas implica dibujar una primera recta y luego otra paralela a esta. Si intentamos mover la segunda, su *comportamiento* difiere del de la primera por la condición establecida sobre ella.

Nos preguntamos entonces ¿qué relaciones es posible establecer entre los objetos geométricos y los de la geometría dinámica, considerando el uso de estos programas para la resolución de problemas de la geometría plana euclídea? En este sentido, intentaremos abonar al estudio de las diversas formas en que el trabajo, dentro de entornos dinámicos, puede aportar para la enseñanza de las propiedades de los objetos geométricos.

Para dar cuenta de algunas de estas cuestiones presentaremos y analizaremos tres episodios de clase en los cuales, a raíz de las tareas propuestas, emergen debates entre estudiantes y con los profesores en torno a las características de ciertos puntos construidos de diferente manera y los consecuentes movimientos que admiten. Asimismo, estudiaremos las relaciones entre esos puntos –en tanto variables identificadas a partir de su arrastre– y el comportamiento de las figuras, condicionado por los aspectos recientemente mencionados. En este marco, las definiciones de algunos objetos geométricos también se tornan asunto de discusión.

En síntesis, intentaremos problematizar aspectos de la enseñanza de la geometría en los espacios de formación docente poniendo el foco en las relaciones entre procedimiento de construcción, arrastre, comportamiento y propiedades de las figuras geométricas.

METODOLOGÍA

Como ya hemos mencionado en la introducción, desde el año 2018 este equipo viene desarrollando diferentes proyectos de investigación. El análisis que venimos llevando a cabo nos permitió identificar ciertas nociones que dan cuenta de la relación entre procedimientos de construcción, arrastre y comportamiento. Algunas de estas nociones han sido estudiadas por diversos autores en una variedad de trabajos, pero suelen aparecer entramadas y, en ocasiones, solapadas unas con otras (Arzarello *et al.*, 2002; Gomes, 1999; Healy, 2000; Laborde, 1995, 1997; Laborde y Caponni, 1994; Restrepo, 2008; Soury-Lavergne, 2011; Talmon y Yerushalmy, 2004).

El proceso de interpretación de la producción de una estudiante[4] que llevamos a cabo dentro del equipo de investigación –que precisamente ponía en el centro la relación entre estas ideas– así como de los intercambios que sucedieron en el aula

4 En el apartado "Episodio 1. De la construcción de un rectángulo a su problematización" se presenta un episodio de clase donde se debate sobre dicha producción.

a raíz de ella, nos impulsó a diseñar nuevas situaciones que nos permitieron profundizar su estudio. Estas actividades fueron llevadas a cabo en otras dos aulas de formación durante el año 2024. Una de ellas tuvo lugar en el marco de la materia Geometría del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática (UNIPE) y la otra en el seminario de Geometría de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria (UNIPE).

La metodología adoptada en esta nueva instancia preserva la utilizada desde el inicio de nuestras investigaciones, la cual consiste en un estudio de caso único e *intrínseco* (Sautu, 2005; Stake, 1998). El caso analizado es el conjunto de interacciones producidas en el marco de los seminarios sobre la enseñanza de la geometría mediada por GeoGebra dictados en el año 2018 y 2024 de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria (UNIPE) y de la materia Geometría del Profesorado de Educación Secundaria. En ambos espacios de formación docente se conjuga un trabajo matemático –y la reflexión sobre este– con un análisis del aprendizaje y la enseñanza de la geometría en el segundo ciclo de la escuela primaria y en el nivel secundario, aspectos que consideramos indisolublemente ligados.

El conjunto de interacciones que son objeto de estudio incluyen tanto las de los y las estudiantes con los problemas geométricos como las instancias reflexivas entre estudiantes y con docentes en los espacios colectivos. Cabe destacar que en dicho estudio de caso los profesores son integrantes del equipo de investigación del cual se desprende este artículo.

Las clases del seminario de la Licenciatura fueron semanales, de tres horas de duración cada una, mientras que la materia geometría del Profesorado de secundaria tiene una carga horaria de seis horas semanales. Para las experiencias analizadas se realizaron grabaciones de cada encuentro en audios y/o videos y luego se transcribieron en archivos de texto. Además, se recogieron todas las producciones elaboradas por los y las estudiantes tanto en GeoGebra como en lápiz y papel.

Para abordar este estudio, analizamos algunos recortes de las clases que llamamos *episodios*. Estos consisten en interacciones entre los y las estudiantes, y/o con los profesores, a propósito de los problemas que se plantearon, que nos resultan particularmente singulares e interesantes para aproximar respuestas a nuestras preguntas de investigación.

MARCO TEÓRICO

LA RELACIÓN DIBUJO-FIGURA-OBJETO GEOMÉTRICO Y LAS CONSTRUCCIONES

La planificación de los seminarios de geometría así como la investigación que venimos desarrollando dentro del equipo asumen ciertas perspectivas que nos resultan insumos potentes para estudiar algunos problemas de enseñanza que emergen al incluir GeoGebra en instancias de formación docente.

Por un lado compartimos la idea de que el trabajo geométrico en la escuela se ocupa –entre otros asuntos– del estudio de las figuras. Dentro de esta idea general, adoptamos la perspectiva que sostiene la decisión de invitar a los y las estudiantes a desarrollar este estudio a partir de la identificación y elaboración de relaciones que caracterizan a los objetos geométricos, intentando superar un tipo de vínculo alojado en sus aspectos perceptivos. A su vez, abonamos a la propuesta que propicia un trabajo anticipatorio, es decir, "aprender a inferir, a partir de los datos y con el apoyo de las propiedades, relaciones que no están explicitadas y que llevarán a establecer el carácter necesario de los resultados de manera independiente de la experimentación" (Sadovsky *et al.*, 1998, p. 9).

Estas consideraciones ponen en el centro la complejidad de las relaciones entre dibujos y figuras, considerando, en principio, que un dibujo es una marca, un trazo, en tanto que la figura sería el objeto ideal, teórico, que puede ser representado por dicho dibujo. Diferentes autores y autoras (Arsac *et al.*, 1992; Berthelot y Salin, 1992; Fregona, 1995; Parzysz, 1988) comparten la perspectiva que sostiene que la figura es el objeto geométrico descrito por el texto que la define, una idea, en tanto que el dibujo es una representación de este objeto.

Desde nuestra perspectiva, acordamos con Sessa *et al.* (2022) en considerar una figura como la relación que establece una persona con el objeto geométrico al tratar con los dibujos. Ahora bien, el producto elaborado también resulta ser un dibujo, pero el trabajo intelectual que se despliega en el aula entendemos que se aloja en el proceso de transición dibujo-figura-objeto geométrico. Las relaciones que se van identificando, las limitaciones de lo perceptivo, el paso de lo concreto a lo abstracto y la necesidad de avanzar en ciertas conceptualizaciones, las generalizaciones que se producen y las validaciones que se elaboran forman parte de este proceso (Itzcovich, s/f).

Esta compleja relación entre dibujo y figura, Duval (1998) la expresa a modo de paradoja:

> Por un lado la aprehensión de los objetos matemáticos no puede darse de otro modo que no sea mediante una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones es posible realizar un trabajo sobre los objetos matemáticos. Entonces, ¿cómo los estudiantes podrían no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones? (p. 2)

Es decir, tratar con las relaciones que caracterizan a las figuras requiere de un trabajo conceptual que supere la percepción y, por otro lado, el trabajo se apoya fuertemente en los dibujos –es decir, en representaciones–, sin los cuales se ven disminuidas las posibilidades de desplegar una actividad matemática con los alumnos y las alumnas en torno a los objetos geométricos. Tal como menciona Duval (1998), la imposibilidad de un acceso directo a dichos objetos, sin apelar a alguna de sus representaciones, provoca una confusión casi inevitable entre el objeto y su representación. Estas cuestiones nos permiten adoptar la idea de que las construcciones geométricas podrían funcionar como un puente entre lo perceptivo y lo argumentativo, entendiendo por construcción geométrica la representación que cada persona elabora de una figura que se propone producir a partir de ciertos datos, en la que usa instrumentos para poner en juego algunas propiedades de la misma (Itzcovich y Murúa, 2022b); este tipo de tarea podría favorecer el estudio de las propiedades de las figuras (Acosta, 2008; Castiblanco *et al.*, 2004; Itzcovich, 2005 ; Perrin Glorian y Godin, 2014; Sadovsky, *et al.*, 1998).

Ahora bien, la representación de un objeto geométrico está condicionada por los conocimientos de los que disponga quien la produce. Al considerar las construcciones geométricas dentro de un proyecto de enseñanza, desde nuestro punto de vista, dichas representaciones se construyen a raíz de las interacciones que suceden en la clase, con lo cual cada persona va desarrollando ciertas interpretaciones que modifica en un contexto social del cual participa.

Al intentar realizar un dibujo que sea representante de un objeto geométrico –recurriendo a los datos con los que se cuenta y utilizando ciertos instrumentos–, la exigencia de lograr atrapar en esa representación las propiedades que la definen pone en relación el dibujo con dicho referente teórico para que el trazado sea reconocido como una de las posibles representaciones del objeto que se pretende construir. Es decir, se trata de establecer si las relaciones que se ponen en juego para representar una figura la determinan o no, y este análisis pone en juego propiedades geométricas (Sadovsky *et al.*, 1998).

LA INCLUSIÓN DE UN PROGRAMA DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Los trayectos formativos que hemos mencionado incorporan el uso del programa GeoGebra. Su inclusión se justifica porque se trata de un *software* de geometría dinámica que ha sido creado como una herramienta de enseñanza con una perspectiva que permite poner en primer plano la caracterización de las figuras a partir de las relaciones entre sus elementos.

Para que un dibujo realizado en GeoGebra –que representa a cierto objeto teórico– mantenga invariante las propiedades involucradas, es necesario apelar a las herramientas que se vinculan con las relaciones que definen al objeto en cuestión.

En este sentido, una de las referencias que tomamos es la relación instrumento-artefacto planteada en la teoría de la *Génesis Instrumental* (Rabardel, 1995). Acordamos con Acosta (2008) en que la originalidad de dicha teoría radica en no considerar por separado el objeto técnico de la persona que lo utiliza, sino en tomar como unidad de análisis las influencias recíprocas entre el objeto y el usuario o la usuaria. Rabardel distingue el concepto *artefacto* (o *herramienta*) del instrumento.

Según este autor, un instrumento es una entidad mixta que comprende al artefacto pero también a la persona. Es decir, utiliza el término *instrumento* para designar el artefacto en una relación instrumental como medio de la acción del sujeto. En el mismo sentido, para Trouche (2003) un instrumento es una entidad mixta compuesta por el objeto técnico y los modos de uso creados por un usuario o una usuaria.

Rescatamos las palabras de Acosta (2008) cuando menciona en su tesis que el instrumento no viene dado, sino que se construye en interacción con el medio en el marco de las tareas a realizar. En este proceso de interacción, por un lado, la persona asimila el artefacto y, por otro, se adapta a él teniendo en cuenta sus limitaciones y potencialidades. Cabe destacar que los artefactos tienen un significado incorporado en una práctica social (Rabardel, 1995).

En algunas investigaciones donde se involucra un programa de geometría dinámica (Acosta *et al.*, 2010; Arcavi y Hadas, 2000; Laborde 1997; Laborde y Capponi, 1994; Restrepo, 2008), las retroacciones son consideradas como la información que brinda el *software* frente a determinada acción que realiza un sujeto. Laborde (1997) menciona que "el desplazamiento por manipulación directa es uno de los componentes importantes de Cabri-geómetra, que ofrece la retroacción a las acciones del alumno" (p. 75).

Al respecto, nos interesa destacar la opinión de Sadovsky (2003) en relación con las retroacciones. Ella advierte que a veces se le atribuyen cualidades humanas al medio cuando decimos que ofrece retroacciones a las acciones del sujeto. Según la investigadora, "en realidad es el sujeto quien se ubica en posición de interpretar los resultados de sus acciones buscando analizar si las decisiones tomadas se encaminan a su finalidad (la resolución del problema) (p. 24)". En otras palabras, no acordamos con las investigaciones que mencionan que automáticamente el programa le brinda retroacciones al estudiante cuando una construcción se desarma frente al movimiento o cuando se quiere interpretar el *comportamiento* de los puntos de una construcción. Por un lado, si bien el *software* realiza las modificaciones en la pantalla al desplazar los objetos, desde nuestro punto de vista, no es el que brinda retroacciones sino que las interpretaciones de las acciones del programa dependen de los conocimientos disponibles y –en el caso de trabajar con docentes– de la postura didáctica de quien lo maneje. Por otro lado, estas interpretaciones no son estáticas, ya que pueden modificarse debido a las interacciones sucedidas en la clase (Murúa, 2025).

EL ARRASTRE, EL COMPORTAMIENTO Y LA DEPENDENCIA

Al considerar desde la enseñanza de la Geometría la inclusión del desplazamiento o el movimiento de las construcciones llevadas a cabo con GeoGebra, se pone en el centro la complejidad de la relación entre dibujo, figura y objeto geométrico. La posibilidad del movimiento de los elementos de una construcción geométrica genera una expectativa sobre el resultado de las decisiones tomadas: si el dibujo se deforma o no, si sigue siendo lo que se intentaba dibujar o se desarma, si el *comportamiento* de los puntos es el esperado, etc. Hipotetizamos que esta expectativa o "sorpresa" (Arcavi y Hadas, 2000) abona al análisis de las relaciones entre las propiedades de la figura, las herramientas utilizadas y las relaciones geométricas subyacentes.

A lo largo de todos estos años, la noción de *arrastre* se fue profundizando y resignificando. Restrepo (2008) menciona a varios autores (Arzarello *et al.*, 2002;

Olivero, 2003) que plantearon diferentes usos y sentidos del desplazamiento por parte de las y los estudiantes: para validar una construcción, para invalidarla, para explorar, etc.

Nos interesa detenernos, en particular, alrededor del arrastre como medio de caracterización de los puntos (Talmon y Yerushalmy, 2004). Por un lado, las autoras consideran el arrastre como una representación de las relaciones entre los distintos componentes del objeto (desde nuestro punto de vista se representan también las relaciones entre los elementos de la construcción). Al igual que en la interpretación de un dibujo, consideramos que la interpretación del arrastre depende de los conocimientos de quien mueve los puntos y por consiguiente es propicio que el o la docente, a raíz de esas interpretaciones, indague junto a sus estudiantes cuáles son esas relaciones que se mantienen invariantes frente al arrastre, cuáles no y por qué.

En relación con la caracterización de los puntos y su posibilidad de arrastre, Laborde (1995) los distingue según su grado de libertad. Cuando un punto es libre (se puede mover por toda la pantalla) le asigna grado de libertad 2; cuando está vinculado a un objeto –a estos puntos los denominamos semilibres–, 1; y cuando es fijo, 0. Estas definiciones se pueden interpretar geométricamente. Podemos decir que un punto tiene grado de libertad 2 cuando no se le impone ninguna restricción (es cualquier punto del plano), tiene grado de libertad 1 cuando se le impone una restricción (por ejemplo, pertenece a una recta, a un segmento, a una circunferencia, etc.) y su grado de libertad es 0 cuando se le imponen dos restricciones (por ejemplo, ser el punto intersección entre dos objetos).

Los párrafos precedentes abonan a la idea de *comportamiento*, que también es un asunto novedoso que se presenta al trabajar en un EGD y que no está presente en lápiz y papel. Talmon y Yerushalmy (2004) hacen alusión al término *comportamiento dinámico* y lo definen como los cambios que ocurren en la pantalla mientras se arrastra un objeto teniendo en cuenta:

- El grado de libertad del objeto arrastrado. ¿Es posible arrastrar el objeto y, de ser así, por qué recorrido?
- La respuesta de los objetos relacionados. ¿Qué objetos cambian su ubicación en la pantalla durante el arrastre? ¿Cuáles son las nuevas ubicaciones? Y, ¿qué cantidades o relaciones permanecen invariantes? (p. 92)

Entendemos que la definición de *comportamiento dinámico* de las autoras refiere a los cambios que ocurren en la pantalla durante el arrastre de un objeto teniendo en cuenta si dicho objeto puede moverse por toda la pantalla, si está vinculado a un objeto o si no es posible moverlo por sí solo.

Desde nuestro punto de vista, dado que el comportamiento depende de cómo fue definida la construcción, puede desligarse del arrastre. Sin embargo, en caso de no acceder al protocolo de construcción, el arrastre puede ser útil para identificar cuál es el comportamiento de los puntos, aunque no lo define.

Además del grado de libertad, Talmon y Yerushalmy tienen en cuenta el movimiento de los objetos dependientes. Profundicemos esta cuestión.

Las relaciones de dependencia entre los elementos de una construcción geométrica[5] están inmersas en el conjunto de decisiones que toma quien la realiza. Resultan una parte constitutiva de las propiedades geométricas que se intentan poner en juego en la construcción ya que, por ejemplo, la perpendicularidad es una relación geométrica entre dos rectas, pero el proceso de construcción demanda establecer una recta de partida y la segunda que resulte dependiente de la primera. Esta dependencia no aparece de manera explícita en lápiz y papel en tanto que el arrastre en un EGD "muestra" esa dependencia. Pero una vez terminada la construcción, la relación de perpendicularidad es simétrica. Esta diferencia la instala el uso del GeoGebra y resulta una complejidad novedosa para nuestros y nuestras estudiantes.

Por otro lado, a medida que se incrementa la cantidad de elementos que se utilizan para llevar a cabo una construcción, mayor complejidad reviste el establecimiento de estas relaciones. Pero es precisamente la identificación de estas relaciones entre los elementos de la construcción la que permite comprender el *comportamiento dinámico* (Talmon y Yerushalmy, 2004). Es decir, ¿qué se arrastra?, ¿qué otros elementos se mueven producto de ese arrastre y por qué?, resultan asuntos asociados al *comportamiento* de una figura.

Otra característica que habilitan los programas de geometría dinámica es tratar con *familias de figuras*, a diferencia del entorno del lápiz y papel donde cada construcción remite a una representación en la que no es posible mover los elementos que la constituyen. Adoptamos el concepto *familia* de Healy (2000) para referirnos a una construcción que mantiene invariante sus propiedades. Es decir, las relaciones geométricas se preservan frente al movimiento, a partir de lo cual, ante el arrastre de los puntos móviles, se obtiene un representante distinto del mismo conjunto de figuras.

LA PROBLEMATIZACIÓN DE LAS RELACIONES ENTRE PROCEDIMIENTO DE CONSTRUCCIÓN, DEPENDENCIA, ARRASTRE Y COMPORTAMIENTO

A continuación analizaremos tres episodios[6] de clase en los cuales, a raíz de las tareas propuestas, se presentan las interacciones sucedidas entre estudiantes y entre estudiantes-profesores en torno a las características de las distintas construcciones. Más precisamente, se debate en relación al "status" de los puntos, su *comportamiento*, el orden de la construcción y las distintas dependencias involucradas.

El primer episodio refiere a una inquietud de una maestra –cursante del seminario de geometría de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la

5 Al realizar una construcción, se van generando dependencias entre sus elementos. Si uno depende de otro, podemos decir que uno es una variable independiente y otro una variable dependiente.

6 En todos los intercambios transcriptos resaltamos en itálica algunas frases que queremos destacar y que serán retomadas en el análisis del respectivo episodio.

Educación Primaria, cohorte 2018– acerca de si es posible construir un rectángulo de manera tal que queden sus cuatro vértices libres. Tal como mencionamos en la metodología, esta inquietud y las investigaciones anteriores nos convocaron a pensar distintas situaciones –puestas en aula en el año 2024– que tuvieran por objetivo analizar la relación entre el arrastre, el comportamiento y la dependencia.

En el segundo episodio se presentan los intercambios sucedidos en una clase del seminario de Geometría del Profesorado en Matemática dictado en el 2024 a partir de la pregunta "¿es posible construir un rectángulo que tenga tres puntos libres?"; y en el tercero se comparten las interacciones acontecidas a partir de la tarea de construir un cuadrado que tenga más de dos puntos libres.

EPISODIO 1. DE LA CONSTRUCCIÓN DE UN RECTÁNGULO A SU PROBLEMATIZACIÓN

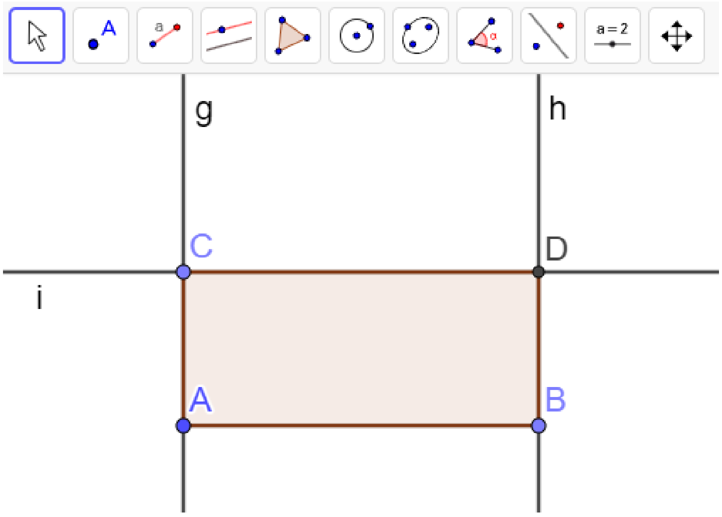
Al efectuar una construcción de una figura con GeoGebra, la condición de que al moverla se preserven las relaciones que la caracterizan exige considerar, entre otros aspectos, la relación de dependencia que se va estableciendo entre los componentes de la figura mediante el procedimiento de construcción y las herramientas que se seleccionan. Ahora bien, no siempre al iniciar el trabajo con este recurso esta relación es considerada por las y los estudiantes. Impregnarle al dibujo esta condición pareciera resultar más exigente. Por ejemplo, al dibujar un segmento, sus extremos resultan ser libres ya que admiten movimiento por toda la pantalla. Al trazar luego una recta perpendicular a él, que pase por uno de sus extremos, se establece una relación de dependencia entre los dos objetos. Dicha relación queda determinada a partir de las herramientas que se seleccionen para realizar la construcción y se corrobora mediante el arrastre de los puntos móviles.

En el seminario de geometría dictado en el año 2018 –luego de trabajar en torno a unas primeras construcciones– se propone la tarea de construir un rectángulo.[7] Jésica desarrolla la siguiente construcción: traza un segmento AB de longitud fija (5 unidades), construye una recta perpendicular (*g*) a dicho segmento que pasa por A y otra perpendicular (*h*) al mismo segmento que pasa por B; en ambos casos usa la herramienta *Perpendicular*. Luego ubica un punto semilibre C sobre la recta perpendicular *g*; por ende dicho punto se puede arrastrar por toda la recta. Posteriormente traza una paralela (*i*) al segmento AB que pasa por el punto C (usando la herramienta *Paralela)* y marca el punto de intersección entre las rectas *i* y *h*, obteniendo el punto D. Finalmente traza el polígono ABCD usando la herramienta *Polígono* (Figura 1). Al arrastrar cualquiera de los puntos A, B, C,

7 En el enunciado no se pide explícitamente que el rectángulo preserve las relaciones que lo caracterizan frente al movimiento sino que esta cuestión es un asunto de debate en el aula.

las figuras que se obtienen preservan las relaciones que caracterizan al rectángulo, es decir, los cuadriláteros siguen siendo rectángulos.[8]

Figura 1: Rectángulo de Jésica con un par de lados opuestos de longitud 5 unidades



Archivo GeoGebra

A raíz de esta construcción se desarrolla el siguiente intercambio en el espacio colectivo de la clase:

1.1. Jésica: Yo hice la construcción así (relata todo el procedimiento que describimos en el párrafo anterior, mientras uno de los profesores va replicando dicha construcción en la computadora que proyecta en la pantalla del aula). Pero lo que no sé cómo es… es que se mueven todos menos este, el punto D, bueno, justo ese es el que me quedó como D (el GeoGebra asigna el nombre a cada punto de manera automática), ese no se mueve.
1.2. Eugenia: ¿No es la intersección esa?
1.3. Jésica: Se mueven todos menos ese (se refiere al vértice D). Lo que pasa es que yo a este no le puse, o sea, yo no le puse D al que me quedó fijo, digamos, ¿ves? El D está fijo. Yo a los demás los puedo mover todo, pero este no, este no puedo moverlo.
1.4. Julia: Lo que pasa es que *ese punto D depende del punto C.*
1.5. Profesor: ¿Se mueve si se mueve el punto C?
1.6. Julia: Y, sí.
1.7. Jésica: Pero yo tengo una pregunta: ¿hay manera de que queden los cuatro puntos libres, que se puedan mover los cuatro vértices?
1.8. Julia: Yo creo que no.
1.9. Andrea: Yo hice un segmento, pero el tema es que no le puse una medida fija (se refiere al segmento AB de la construcción de Jésica), que creo *es la variable en*

8 Estamos exceptuando el caso en el cual C coincide con A.

mi caso, ¿no? Es diferente a la de Jésica, pero tampoco puedo mover ese punto, hay uno que me queda fijo, no lo puedo mover.
1.10. Eugenia: Es que el punto C tiene que estar sobre la perpendicular y la recta paralela a AB que pasa por ese punto C tiene que cortar a la otra perpendicular (se refiere a la que pasa por B). *Ahí te lo fija, es la intersección. Si movés C, se mueve D, depende de C.*
1.11. Profesor: ¿Estás diciendo que se deben cumplir dos condiciones a la vez?, ¿no?
1.12. Eugenia: Sí, por eso no podés moverlo.

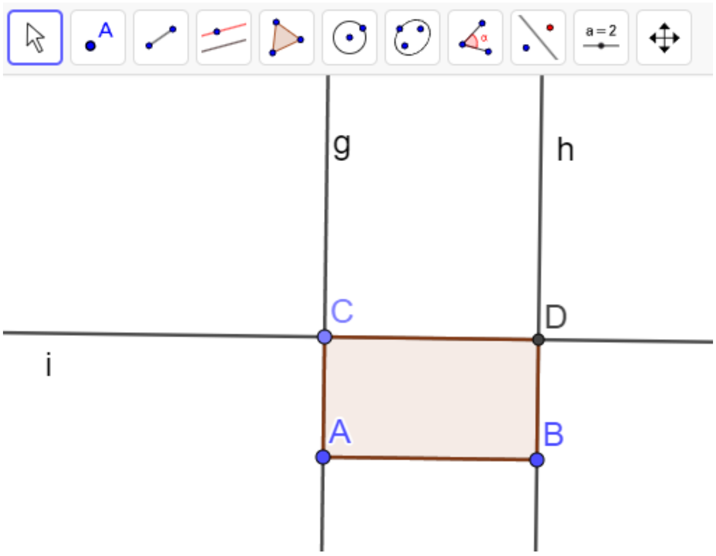
En este extracto de clase se hace referencia a diferentes relaciones. Por un lado, la necesidad de que el punto D pertenezca a la recta paralela al segmento AB, pero al mismo tiempo D debe pertenecer a la perpendicular a dicho segmento que pasa por B (línea 1.10.). Esta doble pertenencia condiciona su posibilidad de movimiento. Asimismo, el programa GeoGebra "exige" que el punto de intersección entre las rectas mencionadas sea definido para trazar el rectángulo con la herramienta *Polígono*. Esta última condición es parte de las *reglas de uso* del GeoGebra y que no resultan tan evidentes ni necesarias al realizar la misma construcción en lápiz y papel. Es decir, ese punto D puede o no dibujarse en el entorno del lápiz y papel ya que queda definido de manera implícita gracias al mismo trazo de la paralela y la perpendicular. Remarcarlo –o nombrarlo– resulta de una decisión para "hacerlo presente", pero se puede terminar de trazar el rectángulo sin la necesidad de efectuar dicha marca. En este sentido podemos considerar que el GeoGebra colabora en la posibilidad de hacer explícitas las condiciones que definen a un punto así como las relaciones de pertenencia que lo caracterizan.

Por otro lado, tanto Julia como Eugenia hacen referencia a una relación de dependencia entre el movimiento del punto D y el movimiento del punto C (línea 1.4. y 1.10.). Es posible identificar que la ubicación del punto D depende de la ubicación del punto C. En este sentido podríamos pensar que el punto C juega el papel de "elemento o variable independiente", en tanto que el punto D jugaría el rol de "elemento o variable dependiente".[9] Esta idea de dependencia queda oculta al abordar este tipo de tarea con lápiz, papel e instrumentos geométricos, aspecto que promueve la problematización del trabajo geométrico al introducir el GeoGebra en las aulas.

Las ideas mencionadas en el párrafo anterior se juegan de diferente manera en el procedimiento de Andrea (línea 1.9). La estudiante realizó una construcción similar a la de Jésica. Comenzó trazando un segmento de extremos libres (es decir, A y B se pueden mover por toda la pantalla) mediante la herramienta Segmento, tal como se muestra en la imagen 2.

9 Vale la pena aclarar que tanto el punto C como el punto D se mueven también al arrastrar los puntos A o B. No estamos considerando en este momento dicha dependencia. En el siguiente episodio haremos referencia a esta cuestión

Figura 2: Rectángulo de Andrea con un segmento AB de extremos libres



Archivo GeoGebra

Al comparar las dos estrategias podemos notar que al arrastrar los puntos móviles de la construcción de Jésica no se genera la familia completa de rectángulos ya que le indicó al programa que el segmento AB tenga una longitud de 5 unidades; por lo tanto el punto B no se puede mover por toda la pantalla. Como la longitud del segmento AB está determinada, al mover C se obtiene una *subfamilia* de rectángulos que resulta estar constituida por todos aquellos que tienen dos lados opuestos de longitud 5 y otros dos lados de longitud variable.

En cambio, en la construcción de Andrea se genera la *familia* completa de rectángulos porque es posible modificar tanto la longitud del segmento AB como la del segmento AC (preservando los 4 ángulos rectos).[10]

Con respecto al *comportamiento* del punto C, en ambas construcciones es el mismo. Dicho punto se mueve sobre la recta perpendicular al segmento AB que pasa por A (*g*). En otras palabras, tanto Jésica como Andrea lo definieron como cualquier punto perteneciente a dicha recta –no coincidente con el punto A–, por lo tanto, su movimiento está restringido por esa condición.

Este análisis desplegado sobre el *comportamiento* de los puntos, la dependencia entre los elementos de las construcciones y la comparación entre estas no pudo ser desarrollado en profundidad con las y los estudiantes en la clase del seminario, pero sí fue asunto de análisis dentro del equipo de investigación. Al intentar interpretar los diálogos de dicha clase, nos hemos planteado algunos interrogantes que pusieron en el centro los asuntos mencionados anteriormente.

10 Vale advertir que al arrastrar los extremos A o B del lado AB, se mantiene una proporción BC/AB constante, condición que no fue determinada por el proceso de construcción. Esta relación no se tornó en asunto de debate en la clase.

En particular, nos preguntamos acerca de la potencialidad didáctica que podría adquirir el tratamiento –en la formación docente– de las relaciones entre procedimiento de construcción, relaciones de dependencia, el arrastre y el comportamiento, aspecto que se origina al incluir el GeoGebra en la enseñanza de la geometría. Identificar estas relaciones también se tornó asunto de exploración y teorización al interior del equipo de investigación.

Dado que ya había concluido el seminario al que nos hemos referido, decidimos diseñar algunas actividades, llevarlas al aula con otros y otras estudiantes para luego desarrollar el análisis de lo acontecido, poniendo el acento en las relaciones mencionadas en el párrafo precedente. Dichas actividades se propusieron luego de haber tratado con las construcciones de rectángulos y cuadrados. Compartimos a continuación cuestiones que entendemos relevantes de este proceso.

EPISODIO 2. EL COMPORTAMIENTO, LA DEPENDENCIA Y LAS CONDICIONES DE LOS PUNTOS EN EL MARCO DE LA CONSTRUCCIÓN DE UN RECTÁNGULO CON TRES PUNTOS LIBRES

En el marco de la materia Geometría del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática (UNIPE), dictada en 2024, los y las estudiantes también tuvieron que construir un rectángulo de manera tal que al arrastrar sus puntos móviles el cuadrilátero no se desarmara. Una vez realizada esta tarea, el profesor planteó la siguiente consigna de manera oral para ser discutida colectivamente: ¿es posible construir un rectángulo que tenga tres puntos libres? Si es posible propongan la construcción y si no es posible argumenten por qué.

Dentro del equipo de investigación teníamos la hipótesis de que la exploración de las características de los diferentes puntos involucrados en una construcción podría abonar al estudio de la potencialidad didáctica que podría adquirir el análisis de la relación entre procedimiento de construcción, relaciones de dependencia, el arrastre y el comportamiento al construir una figura en GeoGebra. En este mismo sentido nos preguntamos si la posibilidad de hacer explícitas las pertenencias y condiciones que verifican ciertos puntos aporta al estudio de las propiedades de la figura. Entendíamos que esta actividad podría dar lugar a estos debates en el aula y, en consecuencia, consideramos la posibilidad de explorar su funcionamiento.

Laura, Carolina, Verónica e Irene realizaron la misma construcción que Andrea correspondiente a la Figura 2. Concluido el trabajo en pequeños grupos, una vez que se identificó en la discusión colectiva que la construcción presentaba tres puntos móviles, se planteó el interrogante de si el tipo de movimiento de A, B y C es el mismo. A continuación presentamos el intercambio donde se debatió el asunto mencionado.

2.1. Irene*: En el caso de A y B es igual, porque se mueven sobre la longitud del segmento*. En el caso de C es diferente porque se mueve en la longitud de la línea perpendicular.

Revista Argentina de Investigación Educativa
vol. V • nro.10 • diciembre de 2025 • pp. 61-90
RAIE

2.2. Profesor*:* O sea, dicen que A y B se mueven en el segmento AB y C sobre la recta *g*, ¿el resto qué opina?
2.3. Lucrecia*:* Para mí A y B se van a mover por todo el plano pero C se va a mover solo sobre la recta g porque determinaron que esté sobre la recta *g*.
2.4. Profesor*:* Entiendo que C se mueve sobre la recta *g* porque ellas definieron un punto sobre la recta.
2.5. Carolina*:* Sí, porque podría estar en cualquier parte de *g*.
2.6. Profesor*:* Hay discrepancias sobre el punto A, porque Irene dice que se mueve sobre el segmento AB y Lucre dice *"no, el punto A se mueve en todo el plano".* ¿Qué está pasando ahí? A ver, discutamos eso.
2.7. Lucrecia*: Porque si A se moviera sobre el segmento AB, tendría que tener el mismo movimiento que C sobre la recta* g. Pero en cambio, a A y B los podés mover por todo el plano, porque dependiendo del movimiento que hagas lo vas *girando* por todo el plano.
2.8. Profesor*:* ¿Por qué, si muevo A, se mueve *g* también? *Si no lo definimos sobre la recta* g. ¿O sí lo definimos sobre la recta *g*?
2.9. Lucrecia*:* Cuando marcaste la perpendicular *g*, determinaste que tenía que pasar por A.
2.10. Profesor*:* ¿Y por qué si muevo A se mueve g*?*
2.11. Ernesto*:* Porque respeta la perpendicularidad al segmento AB.
2.12. Laura*:* g *depende de A*.
2.13. Profesor*:* Laura dice que g depende de A, ¿y Ernesto?
2.14. Ernesto*: Que la recta g siempre va a respetar lo que le dijiste al principio, que sea perpendicular a AB*. Ahora, el segmento AB se comporta como si fuera un radio, con centro en B. Entonces A siempre lo podés mover con centro en B (hace un gesto con el dedo de una circunferencia), en cualquier dirección y donde vos pares va a ser un radio.
2.15. Profesor*:* Eso no entendí, ¿a ver lo del radio?
2.16. Ernesto*:* Como si tuvieras centro en B y radio del segmento AB.
2.17. Profesor*:* ¿Hago una circunferencia?
2.18. Ernesto*:* Me refiero al comportamiento que tiene A, es como si fuera un punto de una circunferencia con centro en B.

En este episodio se trataron dos asuntos. Por un lado, la posibilidad de caracterizar geométricamente los puntos A, B y C y, por el otro, el estudio de la dependencia entre algunos elementos de la construcción.

Con respecto al primer asunto, este intercambio nos permite advertir que, para los y las estudiantes, no es sencillo identificar las condiciones geométricas que poseen los puntos de una construcción, aun siendo sus productoras y productores. Por ejemplo, Irene había participado activamente de la construcción de la *familia* de rectángulos y sin embargo creía que los puntos A y B se desplazaban sobre el segmento AB. En sus palabras: "En el caso de A y B es igual, porque se mueven sobre la longitud del segmento. En el caso de C es diferente porque se mueve en la longitud de la línea perpendicular (línea 2.1.)". Es decir, para ella, el *comportamiento* de los puntos A, B y C era similar porque se desplazaban sobre un objeto geométrico, en un caso sobre una recta que contiene al segmento AB y en otro, sobre la recta *g*.

En cambio Lucrecia identifica que los puntos A y B se mueven por todo el plano (línea 2.3.), argumentando que, por ejemplo, si A se moviese sobre el segmento AB debería tener el "mismo movimiento" que C (línea 2.7.).

Posteriormente, cuando Ernesto menciona "ahora, el segmento AB se comporta como si fuera un radio, con centro en B" (línea 2.14.) interpretamos que quiere decir que el punto A se mueve sobre una circunferencia de centro B y por radio . Esta interpretación se deduce de su frase "me refiero al *comportamiento* que tiene A, es como si fuera un punto de una circunferencia con centro en B" (línea 2.18.), ya que al mover A, aunque se modifica la longitud del segmento AB, el punto B no se desplaza.

Entendemos que esta diferencia en la interpretación del *comportamiento* de los puntos A y B remite, entre otros aspectos, a cierta anticipación que se realiza y que condiciona el modo en que se arrastran los puntos al momento de intentar caracterizarlos (Arias *et al*., 2022). Es decir, si se supone que los puntos A y B se mueven sobre una recta que contiene al segmento AB, el arrastre que realizan algunas y algunos estudiantes preserva, en cierta medida, esa idea. De la misma manera, si se supone que A está en una circunferencia de centro B, al arrastrar el punto B se lo desplaza por una supuesta circunferencia, aunque no se la haya construido.

Por otro lado, esta cuestión nos permite advertir que la interpretación que se hizo del arrastre también pudo estar condicionada por los movimientos que el profesor le impregnó a los puntos. En particular, en este caso arrastró el punto A de manera "circular".

Notemos que la interpretación del arrastre que desarrollan Irene y Ernesto no se condice con las propiedades puestas en juego en la construcción. Sin embargo, resultan consistentes con el modo en que fueron arrastrados los puntos estando presente la tensión entre lo perceptivo y lo geométrico.

Las intervenciones de Irene, Lucrecia y Ernesto acerca del *comportamiento* de los puntos las podemos asociar también con la idea de Talmon y Yerushalmy (2004), quienes consideran que el arrastre es una representación de la relación entre los distintos elementos de una construcción. Avanzando en esta línea, entendemos que el arrastre también puede considerarse como una acción que despliega el sujeto comandada por los conocimientos de los que dispone en función de intentar dar cuenta –o explorar– cierta relación geométrica. En este sentido, es posible concebir que el arrastre permite desplegar una interpretación de la representación que se evidencia en la pantalla a raíz de la manipulación que lleva a cabo el usuario, tal como se evidencia en los diálogos precedentes.

En diferentes oportunidades, los profesores suponemos que dicha interpretación queda establecida unívocamente a partir de arrastrar los puntos móviles de las construcciones, sin dar lugar al despliegue de un análisis más profundo acerca de las condiciones geométricas que poseen dichos puntos. Así, entendemos que las interpretaciones que emergen en torno a una representación en GeoGebra –y que en este caso se ponen de manifiesto en el arrastre y el *comportamiento*– pueden transformarse en un asunto fértil dentro del aula en los procesos de estudio de las propiedades de las figuras.

El otro aspecto que rescatamos del intercambio compartido es la discusión sobre la dependencia entre determinados elementos de la construcción. Esta cuestión fue introducida por el profesor cuando pregunta: "¿por qué, si muevo A se mueve *g* también? Si no lo definimos sobre la recta *g*. ¿O sí lo definimos sobre la recta *g*?" (línea 2.8.). Ante estas preguntas Lucrecia responde: "cuando marcaste la perpendicular *g*, determinaste que tenía que pasar por A" (línea 2.9.). Luego el profesor vuelve a preguntar por qué si se mueve A se mueve *g* (línea 2.10.) y tanto Ernesto como Laura identifican la dependencia que hay entre *g* y A (líneas 2.11. y 2.12., respectivamente). En palabras de Ernesto: "la recta *g* siempre va a respetar lo que le dijiste al principio, que sea perpendicular al segmento AB" (línea 2.14.).

Recordamos que Talmon y Yerushalmy (2004), cuando definen al *comportamiento dinámico*, se preguntan: ¿qué objetos cambian su ubicación en la pantalla durante el arrastre? ¿Cuáles son las nuevas ubicaciones? ¿Qué cantidades o relaciones permanecen invariantes? Es decir, para interpretar el *comportamiento* de los puntos, las autoras también involucran el análisis de los cambios que se producen en los demás objetos. Sostenemos que la discusión presentada en el párrafo anterior abona a dicho análisis y además ayuda a interpretar la dependencia que hay entre los elementos de una construcción (Laborde y Capponi, 1994).

Habíamos afirmado anteriormente que toda representación queda ligada al proceso de construcción, y este a su vez queda definido por las herramientas utilizadas y el orden en el que se las ha utilizado. Una vez construida una determinada representación llamaremos *comportamiento* al conjunto de condiciones establecidas por las herramientas en un determinado orden y que ponen en juego relaciones geométricas. Lo que nosotros vamos a entender por *comportamiento* "contiene" al conjunto de relaciones que se le otorgaron en el procedimiento de construcción, de manera independiente del arrastre que se realice de los puntos móviles. Este puede poner en evidencia algunas o todas las relaciones geométricas que se impregnaron en el momento de su construcción y puede ser diferente para cada sujeto, aun con el mismo proceso de construcción.

Esta diferencia resulta esencial para, por ejemplo, definir el *dominio de validez* de una construcción (Arias *et al.*, 2022). Es allí donde discutimos el hecho de que una representación soporte el arrastre no puede ser condición única para su validez.

Asimismo, entendemos que la interpretación del *comportamiento* a través del arrastre de los elementos de la construcción puede admitir un discurso argumentativo –más allá de las cuestiones tecnológicas y perceptivas–, tal como el elaborado por Lucrecia (línea 2.9.). En este caso, hay posibilidad de fundamentar dicho *comportamiento* a partir de una relación geométrica que fue considerada en el procedimiento de construcción –el uso de la herramienta *Perpendicular*–, la condición de que pase por el punto A y las relaciones de dependencia que se establecen y se evidencian en el arrastre.

A continuación compartimos cómo siguió el intercambio sobre el análisis de las condiciones que tienen los puntos de la construcción.

2.19. Profesor*:* ¿Los puntos A y B cumplen alguna condición?[11]
2.20. Laura*: Son puntos de esa recta.* De la recta que pasa... donde está el segmento AB.
2.21. Yanel: Claro, estarían alineados... en esa misma recta.
2.22. Profesor*:* Si nos dan dos puntos, siempre va a haber una recta que los contiene. Igualmente es cierto lo que dicen, estos dos puntos (A y B) pertenecen a una recta, aunque no esté marcada (el profesor traza la recta que pasa por A y B). *Entonces una primera cuestión a diferenciar en relación al movimiento es el pertenecer a un objeto geométrico y el hecho de dónde está definido, dónde se mueve.* Porque el punto A pertenece al segmento AB (el profesor mueve A). *El tema es que si muevo el punto A, el segmento cambia.* ¿Ven que es otra inclinación? Es otro segmento. Aunque sigue perteneciendo, el punto está en otro segmento. *En cambio, si muevo el punto C, la recta* g *no cambia.* O sea, C se está moviendo sobre la misma recta.
2.22. Esteban*:* ¿Y eso quiere decir que A se mueve en el espacio?
2.23. Profesor*:* En el plano en este caso. Porque es como si hubiese hecho esto, primero marco dos puntos A y B y después la recta que pasa por ellos. ¿Estos dos puntos, cumplen alguna condición geométrica?
2.24. Laura*:* Son dos puntos cualesquiera en el plano.
2.25. Profesor*:* ¿El punto D cuántas restricciones tiene?
2.26. Carolina*: Una, porque es la intersección. ¿O puede variar dependiendo de dónde esté el punto C?*
2.27. Verónica: *Va a depender del movimiento de los otros puntos.*
2.28. Laura*:* Justo iba a decir eso, depende de C el D.
2.29. Lucrecia*: Va a depender del movimiento de los demás puntos.*
2.30. Profesor*:* Antes pregunté sobre la cantidad de restricciones del punto D, y Caro dijo una sola. ¿Cuál es esa restricción?
2.31. Lucrecia*:* Tiene más de una restricción, porque primero tiene que ser intersección y segundo se puede mover nomás sobre la recta *h*.
2.32. Carolina*: Pero dependiendo solo individualmente del punto D, la restricción es intersección, no se puede mover. Depende de dónde esté el punto C, va a estar D.*
2.33. Profesor*:* Bien sí. Entonces D tiene una condición que es ser intersección entre la recta *i* y la recta *h*. Y esa es una condición que está bien. El hecho de ser intersección, ¿cuántas restricciones tiene? Una intersección entre dos objetos, ¿cuántas restricciones involucra?

11 Si bien en este intercambio se utilizan las palabras restricción y condición como sinónimos, podemos suponer que no lo sean en otros contextos. Por ejemplo, al trazar una recta con GeoGebra definida por dos puntos A y B, estos puntos tienen la condición de definirla. Pero al mismo tiempo, al poder ser arrastrados por todo el plano, no tienen restricciones.

Revista Argentina de Investigación Educativa
vol. V • nro.10 • diciembre de 2025 • pp. 61-90
RAIE

2.34. Laura*:* Las dos rectas, porque esas rectas se van a cortar en ese punto en especial.
2.35. Profesor*:* Bien, el punto D tiene que pertenecer a las dos rectas, porque es la definición de intersección. ¿Sin embargo cuál es la diferencia entre C y D? Porque los dos son intersecciones.
2.36. Esteban*: Uno lo elegí. El C lo elegí, D no.*
2.37. Profesor*:* ¿Escucharon a Esteban? El C lo elegimos, no está determinado. Eligieron ellas el punto C. Y después trazaron la recta *i*. Una vez hecho eso, el punto D no lo puedo elegir, está determinado por la intersección. Si muevo C, el D va a cambiar porque es una nueva intersección. En realidad podemos pensar que los cuatro puntos son intersecciones. A es intersección entre el segmento AB y la recta *g* también, sin embargo no lo definimos así. Arrancamos la construcción trazando un segmento AB cualquiera.

El intercambio comienza con una discusión en la cual Laura y Yanel interpretan que los puntos A y B cumplen la condición de pertenecer a una recta (líneas 2.20. y 2.21.). Para tratar esta cuestión, el docente elige comparar los *comportamientos* de los puntos A y C. En primer lugar, los puntos A y B definen al segmento AB. En consecuencia, al arrastrar el punto A, cambia dicho segmento (se puede modificar tanto su longitud como su inclinación), aunque GeoGebra preserve la misma denominación para sus extremos. Por el contrario, al arrastrar C la recta *g* no cambia, ya que dicho punto se desplaza sobre la misma recta (línea 2.22.).

Lo mencionado en el párrafo anterior nos advierte que el proceso de caracterización de los puntos demanda no solo analizar las pertenencias sino que es necesario identificar cómo fueron construidos.

El segundo asunto a destacar de este intercambio tiene que ver con el análisis de la caracterización del punto D. Mientras que Carolina considera que la intersección es una sola condición (línea 2.26.), Verónica, Laura y Lucrecia analizaron la dependencia que tiene el punto D en relación con los demás puntos. Entendemos que la interpretación de Laura de que el punto D depende solamente de C (línea 2.28.) tiene que ver con el orden de la construcción. Esto es así porque C define dónde está ubicada la recta *i* y, por lo tanto, el punto de intersección entre las rectas *i* y *h* queda determinado (punto D). Pero también se puede realizar la interpretación de Verónica y Lucrecia (línea 2.27. y 2.29., respectivamente) de que el punto D depende del movimiento de los demás puntos (líneas 2.31. y 2.33.). Es decir, al mover B, cambia la longitud e inclinación del segmento AB. Por lo tanto, al cambiar las rectas *g* y *h*, también se modifica la recta *i* y necesariamente el punto D –intersección entre *i* y *h*– es otro.

Volviendo a la cantidad de restricciones que presenta el punto D, Lucrecia opina que “tiene más de una restricción, porque primero tiene que ser intersección y segundo se puede mover nomás sobre la recta *h*” (línea 2.31.). Entendemos que la estudiante identificó que, al mover C, el punto D se mueve sobre la misma recta *h*. Ante lo cual, Carolina le responde “pero dependiendo solo individualmente del punto D, la restricción es intersección, no se puede mover. Depende de dónde esté C va a estar D” (línea 2.32.).

La intención de analizar las restricciones de los puntos en el aula encuentra interés en el estudio de las relaciones geométricas involucradas en el procedimiento de construcción y su relación con los movimientos que admite. La frase de Esteban "uno lo elegí. El C lo elegí, D no" (línea 2.36.)[12] abona esta cuestión.

Lo mencionado en el párrafo anterior tiene relación con el ejemplo propuesto por el profesor en el final del intercambio (línea 2.37.). Aunque cada vértice del rectángulo puede interpretarse como intersección de dos objetos geométricos, la diferencia entre ellos tiene que ver con cómo fueron definidos y el orden de la construcción. Más precisamente, los puntos A y B se pueden desplazar por todo el plano porque no tienen ninguna restricción geométrica, ya que son dos puntos libres que definen al segmento AB. En cambio, el punto C se definió como cualquier punto de la recta perpendicular a dicho segmento que pasa por A. Por último, como mencionó Esteban, el punto D "no lo elegimos", queda unívocamente determinado por la intersección entre las rectas *i* y *h*.

Más allá de que en el desarrollo de la clase analizada no se llegó a concluir que no es posible construir un rectángulo que tenga tres puntos libres como vértices, creemos que todas las discusiones compartidas abonaron a que los y las estudiantes profundizaran ciertos conceptos matemáticos como la pertenencia de un punto a un objeto, la dependencia entre objetos y las condiciones geométricas que se van imponiendo durante el procedimiento de construcción de una figura. Entendemos que este entramado abona al estudio de las propiedades de las figuras geométricas, en este caso, del rectángulo.

EPISODIO 3. EL COMPORTAMIENTO Y LA DEPENDENCIA EN EL MARCO DE LA CONSTRUCCIÓN DE UN CUADRADO

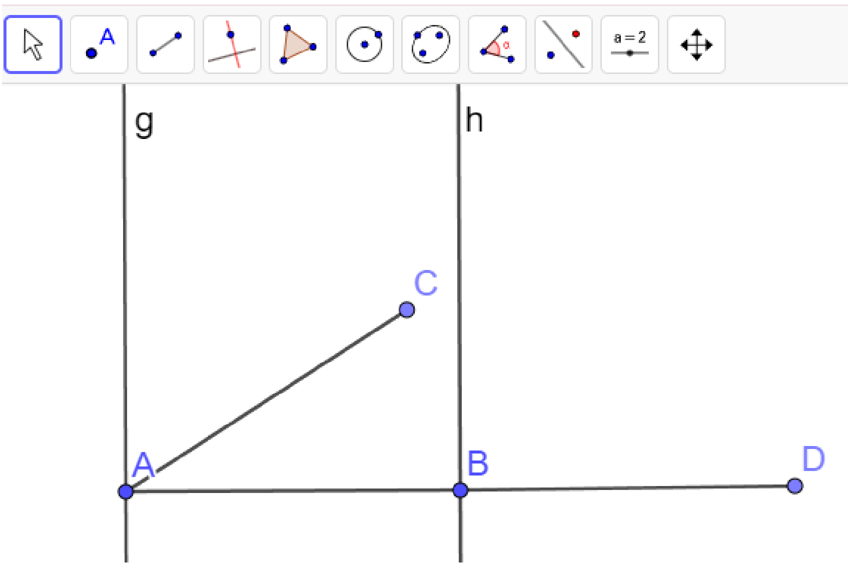
Además de la construcción de un rectángulo con el programa GeoGebra, en el seminario de geometría de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Primaria, se les propone a los y las estudiantes la construcción de un cuadrado teniendo la intención de que no se desarme frente al arrastre de sus puntos móviles; cuestión que es asunto de negociación en el aula. En la cohorte 2024, posteriormente a dicha construcción, el profesor propone un debate dentro del aula a raíz del siguiente interrogante: ¿será posible construir un cuadrado que tenga más de dos puntos libres?

Esta pregunta, al igual que en el caso del rectángulo, también tenía una impronta exploratoria. Es decir, nos interesaba analizar su potencialidad en el terreno del estudio de las relaciones de dependencia entre los elementos que se van incluyendo en la construcción de una figura y los debates que propiciaba en términos de las propiedades que involucra.

12 Si bien las y los estudiantes le indican al programa GeoGebra que marque el punto de intersección mediante la herramienta correspondiente, dicho punto ya está determinado previamente por el procedimiento de construcción.

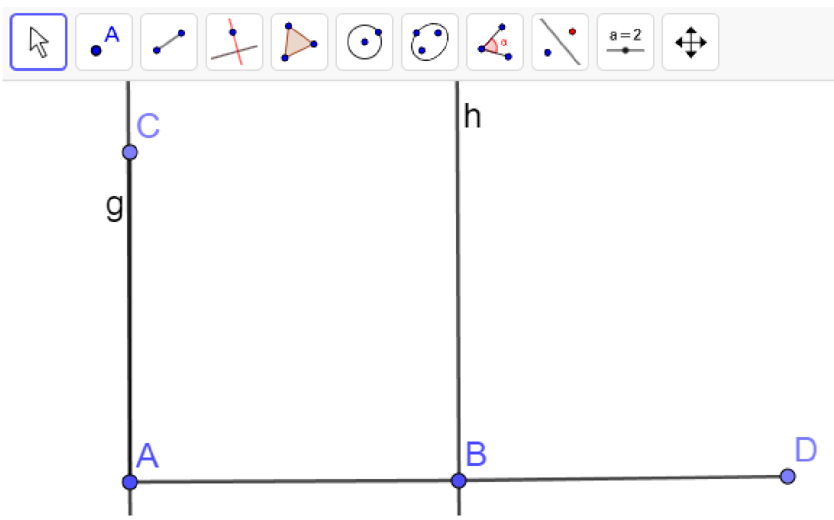
María Teresa había desarrollado dos construcciones para el cuadrado: una apoyada en diagonales iguales, perpendiculares y que se cortan en su punto medio; y otra sostenida en la construcción de un segmento, rectas perpendiculares a dicho segmento por sus extremos y segmentos de longitud dada (para garantizar la igualdad de los lados). Más precisamente, para realizar la segunda construcción trazó un segmento AB, construyó dos rectas perpendiculares por sus extremos, pero en lugar de recurrir a las circunferencias decidió dibujar segmentos con origen en los extremos del lado AB (cuya longitud era la misma que AB) y luego los rotó para que quedaran ubicados "sobre" cada perpendicular (Figuras 3, 4, 5 y 6).

Figura 3: Construcción de María Teresa. Las rectas g y h son perpendiculares al segmento AB. Los segmentos AC y BD tienen la misma longitud que AB



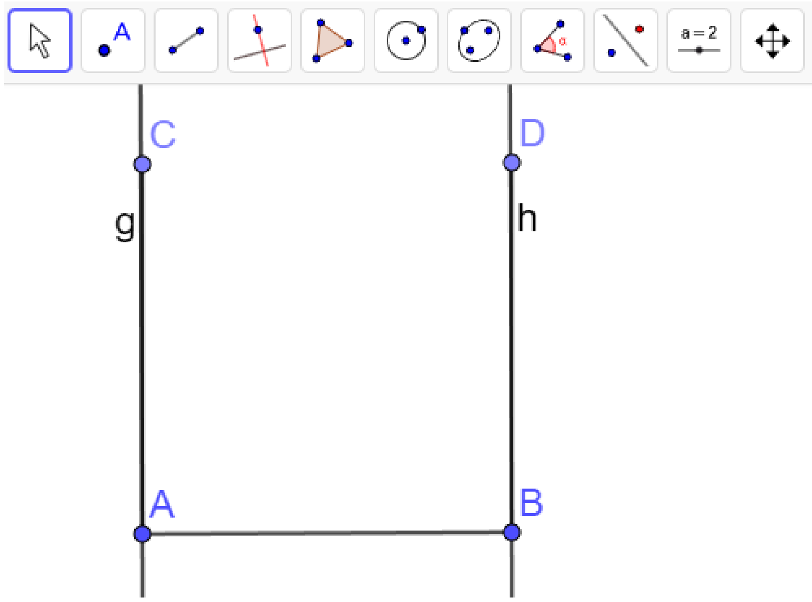
Archivo GeoGebra

Figura 4: La estudiante arrastró C hasta que "perteneciera" a g



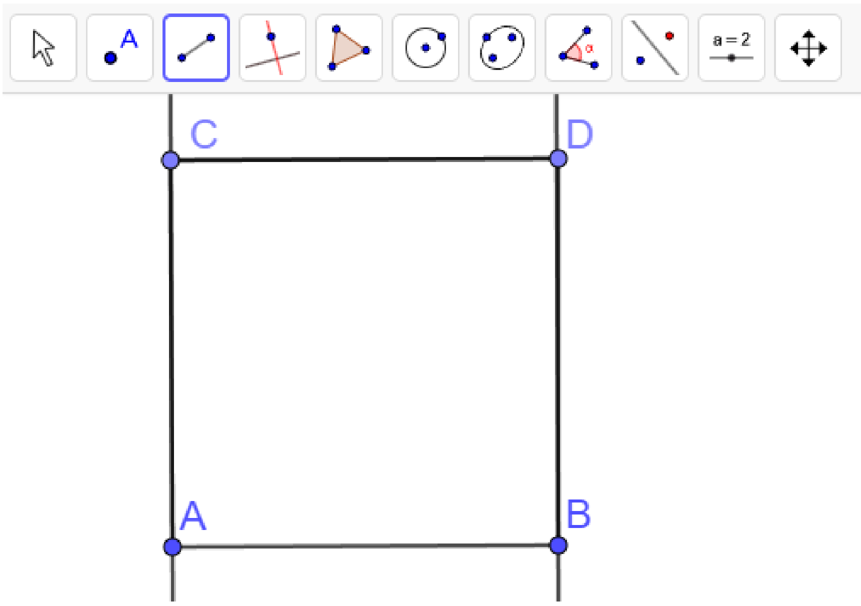
Archivo GeoGebra

Figura 5: Luego arrastró D hasta que "perteneciera" a h



Archivo GeoGebra

Figura 6: Finalmente trazó el segmento CD



Archivo GeoGebra

Esta última construcción es la que María Teresa decide recuperar para pensar en la nueva pregunta realizada por el docente.

Ahora bien, esta producción del "cuadrado" no soporta el arrastre ya que ni C ni D pertenecen a las rectas perpendiculares al lado AB. Sin embargo la estudiante apela a las propiedades geométricas que caracterizan al cuadrado, ya que intenta (sin éxito por el modo en que funciona GeoGebra) garantizar la congruencia de los lados y su perpendicularidad. Podemos afirmar que María Teresa tenía la intención de que el punto C perteneciera a la recta *g* –perpendicular al lado AB por el punto A–, cuestión que logra visualmente pero, al no definirlo bajo esas condiciones, esta relación geométrica no se mantiene invariante frente al arrastre. Queda en evidencia en este caso la diferencia entre "ver" y "definir". Más precisamente, al trabajar en un EGD, si se pone en juego una propiedad geométrica de manera visual, esta no se mantiene invariante frente al movimiento. Para que esto ocurra es necesario definirla a través de la herramienta que "la porta". Es por esta razón que las relaciones de pertenencia cobran una importancia que no tienen en el entorno del lápiz y papel. Además, "esta precisión en el rigor de la comunicación favorece que los y las estudiantes (en este caso docentes en ejercicio) identifiquen a partir de qué elementos se definen los objetos geométricos (circunferencias, rectas paralelas, perpendiculares, puntos de intersección, etc.)." (Murúa, 2025, p. 190). El movimiento es el que posibilita reconocer si las relaciones geométricas fueron definidas o fueron impuestas de manera visual.

A raíz de esta construcción se desarrolla el siguiente diálogo entre María Teresa y el profesor:

3.1. Profesor: Bueno, contame qué pensaste al hacer esto.
3.2. María Teresa (M.T.): Yo empecé por el lado AB, después tracé dos perpendiculares a ese lado, una por A y otra por B. Y me di cuenta de que podía hacer un "segmento de longitud dada" que empiece en A, y que mida el segmento AB. Y después *lo levanto para que quede perpendicular al segmento* AB. Después hice un segmento de longitud AB que empiece ahora en B, lo levanto para que quede en la otra perpendicular. Ahí sí tenemos más de dos puntos celestes. Pero se me desarma, necesito un punto de intersección para que no se desarme.
3.3. Profesor: O sea, vos decís que, si esos segmentos que levantabas fueran puntos de intersección, no se desarmaría. Claro, lo que pasa es que, cuando levantamos el segmento y lo apoyamos sobre la perpendicular, el punto no es de la recta, lo apoyamos ahí.
3.4. M.T.: Claro, pero podría usar la circunferencia, como hice antes, con centro en A y radio del segmento AB, pero después tengo que marcar la intersección con la recta perpendicular y ahí ese punto tiene la misma distancia a A que la que hay entre A y B y pertenece a la recta, *y ya me queda un punto negro, no azul.*
3.5. Profesor: ¿Y por qué quedó negro?
3.6. M.T.: Porque para que pertenezca a la recta y a la circunferencia es ese solo, incluso si hago el otro vértice que falta, *también va a quedar fijo, negro*, ahí también hay uno solo.
3.7. Profesor: ¿Siempre vale esto? O sea, si un punto pertenece a una circunferencia y pertenece a una recta, al mismo tiempo, ese punto será negro.
3.8. M.T.: *Voy a hacer una pregunta que creo que es ingenua, ¿esto pasa en GeoGebra? ¿O pasa en la vida real, digo, en geometría?*
3.9. Profesor: Es muy buena tu pregunta, si este análisis se podría hacer en lápiz y papel.

3.10. M.T.: O sea, siempre que se cruzan una circunferencia y una recta hay un solo punto,[13] ¿no? Eso vale para la geometría, más allá del GeoGebra. En esta construcción, el punto que acomodamos sobre la recta solo tenía la misma distancia pero no pertenecía a la recta, si también quiero que pertenezca a la recta, hay uno solo. Tiene que cumplir dos condiciones y entonces ya no lo puedo mover. Por ejemplo, si lo muevo, ya no va a estar en la recta.
3.11. Profesor: O sea, pareciera que si un punto cumple con dos condiciones, queda fijo. ¿Algo así? Esta construcción, en lápiz y papel, también permitiría analizar esas dos condiciones: trazo el lado AB, pincho con el compás en A, abro hasta B y trazo la circunferencia que contiene a todos los puntos que están a distancia AB de A. De todos esos, elijo uno que esté también en la perpendicular al segmento AB que pasa por A. También es intersección. No es del GeoGebra, es de la Geometría. En todo caso el GeoGebra lo dibuja de color negro por tratarse de un punto que cumple ciertas condiciones.
3.12. M.T.: *Me doy cuenta de que cuando levantamos el segmento para que el extremo quede en la perpendicular, el programa no toma ese punto en la perpendicular, no lo fija a la recta, por eso después se puede seguir moviendo fuera de la recta, en cambio, si lo tomamos como intersección, le decimos al programa que pertenezca a la circunferencia y a la recta, ahí lo fija.*

Varias cuestiones nos interesa destacar de este intercambio. Por un lado la diferencia que María Teresa identifica con relación al color de los puntos, interpretando que dicha diferencia da cuenta de características distintas: los que se pueden arrastrar y los que "quedan fijos" (línea 3.6.). Pero se interroga sobre esta cuestión casi en términos de tensión entre aspectos conceptuales propios de la geometría y características de programación de este entorno: "¿esto pasa en GeoGebra? ¿O pasa en la vida real, digo en geometría?" (línea 3.8.). Esta inquietud es expresada por María Teresa en función de su procedimiento de construcción cuando menciona "lo levanto para que quede en la perpendicular. Ahí sí tenemos más de dos puntos celestes. Pero se me desarma, necesito un punto de intersección para que no se desarme" (3.2.). Podemos notar que en esta frase se conjugan aspectos tecnológicos (color de los puntos) con relaciones geométricas (punto de intersección) (Laborde y Capponi, 1994).

Una cuestión que identificaron Talmon y Yerushalmy (2004) es que cuando se trabaja en un EGD también es frecuente que cambie el lenguaje. En nuestro caso, esta característica está presente en la frase citada en el párrafo anterior cuando María Teresa menciona "lo levanto para que quede perpendicular a AB…" (3.2.) o cuando menciona "me doy cuenta que cuando levantamos el segmento para que el extremo quede en la perpendicular…" (3.12.). Las investigadoras identificaron que,

13 Interpretamos que M.T. se refiere exclusivamente a este caso asociado a la construcción del cuadrado y no considera otras posibilidades de intersección entre una circunferencia y una recta: un punto, dos puntos, ningún punto.

al trabajar en un EGD, los y las alumnas pueden tener la sensación de que los objetos tienen una dimensión adicional de plasticidad física que los hace manipulables.

Por su parte, Ng (2014) menciona que el arrastre de los objetos también puede formar parte de la comunicación. Es decir, cuando María Teresa dice "lo levanto para que quede perpendicular al segmento AB..." (3.2.) le está comunicando al profesor cómo realizó su construcción. Es interesante notar que el docente, en su respuesta, adopta el lenguaje empleado por la estudiante cuando menciona "o sea, vos decís que si esos segmentos que levantabas fueran puntos de intersección, no se desarmaría". (3.3.)

En otras palabras, la acción de arrastrar puede interpretarse como una acción de gesticulación en el sentido de que permite mover el punto en la pantalla cumpliendo una función comunicacional (Ng, 2014).

Por otro lado la estudiante reconoce, al final del intercambio (3.12.), la diferencia entre ubicar un punto apelando a su arrastre y determinar un punto a raíz de restricciones que se le imponen para que verifique determinadas condiciones (Laborde y Capponi, 1994). Una vez más, se hace presente la diferencia entre "ver" y "definir" mencionada anteriormente.

Entendemos que este intercambio podría haber avanzado hacia un proceso de conceptualización mayor. Es decir, retomar o discutir la idea de que, dado un segmento AB, hay un único cuadrado que tendrá por lado a ese segmento. Desde esta idea, los vértices C y D ya quedan determinados por el segmento de partida, aunque no se lleve a cabo la construcción, y esto es un aspecto esencial en los procesos de conceptualización de las figuras: qué relaciones o elementos las determinan. Es decir, el análisis de las características de los puntos que se trazan al llevar a cabo la construcción de una figura resulta ser un insumo para el estudio de la cantidad de soluciones que admite. Al mismo tiempo, es posible asociar este estudio a la definición o caracterización de dicha figura.

A su vez, interpretar el hecho de que un cuadrado queda definido a partir de uno de sus lados permitiría también analizar las relaciones de dependencia: los otros tres lados y los dos vértices que faltan quedan determinados, son únicos. Y si cambia el segmento de partida, cambia el cuadrado, permitiendo tratar con la idea de *familia* de cuadrados.

Desde estas ideas nos animamos a afirmar que hacer explícitas –producto del trabajo que se propicie– estas relaciones movilizadas en las construcciones que se desarrollan con GeoGebra colaboran en los procesos de conceptualización que elaboran los y las estudiantes.

CONCLUSIONES

A partir del interrogante de una estudiante del seminario de geometría de la Licenciatura acerca de la posibilidad de construir con GeoGebra un rectángulo con cuatro puntos libres, en nuestro grupo de investigación nos preguntamos sobre la potencialidad didáctica de considerar –en la formación docente– como objeto de enseñanza las relaciones entre procedimiento de construcción, relaciones de dependencia, el arrastre y el comportamiento.

Una vez analizados los episodios compartidos podemos destacar dos asuntos. Por un lado, afirmamos que las interacciones sucedidas, tanto entre pares como con los profesores, a partir del análisis del *comportamiento* de los puntos, abonaron a que los y las estudiantes profundicen ciertos conceptos matemáticos, a saber: la pertenencia de un punto a un objeto, la dependencia entre objetos, las relaciones geométricas puestas en juego en las construcciones y su vínculo con las herramientas utilizadas. Como hemos mencionado, entendemos que este entramado abona al estudio de las propiedades de las figuras geométricas, en este caso, del rectángulo y del cuadrado.

Asimismo, el análisis del *comportamiento* de los puntos también permite estudiar de qué manera una figura queda determinada. Por ejemplo, para que una construcción logre generar la *familia* completa de cuadrados, es necesario que haya únicamente dos puntos libres (los que determinan el lado). La fundamentación de que no es posible que haya más puntos móviles –ya sean libres o semilibres– proviene de la geometría: si se quiere construir un cuadrado dado un segmento, todos los demás elementos de la construcción quedan unívocamente determinados.

Por otro lado, a nosotros como docentes, el análisis de los episodios dentro del equipo de investigación nos ayudó a desnaturalizar el hecho de que la persona que realiza una construcción (o alguien que la está analizando) puede advertir de manera inmediata la relación entre el *comportamiento* de los puntos mediante el arrastre, las propiedades geométricas puestas en juego y la definición de los objetos geométricos.

Desde nuestro punto de vista, identificamos diversos factores que pueden condicionar la interpretación que hace un sujeto del *comportamiento* de los puntos de una construcción. El primero de ellos tiene que ver con que no hay una conceptualización sobre cómo fueron definidos los objetos. Aquí hay un obstáculo que es necesario abordar: GeoGebra etiqueta a distintos objetos con el mismo nombre. Por ejemplo, cuando se construye una recta que pasa por dos puntos A y B, al mover los puntos A o B la recta cambia, pero el programa la sigue denominando con la misma letra. Es por esta razón que se debería diferenciar la pertenencia de un punto a un objeto de cómo fue definido. En otras palabras, el proceso de caracterización de los puntos demanda no solo analizar las pertenencias sino que es necesario identificar cómo fueron construidos.

Otro factor que incide en la interpretación del *comportamiento* de los puntos tiene que ver con el arrastre que se realice. Tal como hemos mencionado, quizás la persona que mueve los objetos tiene cierta anticipación de cómo deberían desplazarse y dicha anticipación condiciona el modo en que se arrastran los puntos al momento de intentar caracterizarlos. También puede suceder lo que ocurrió en unos de los episodios analizados: si alguien está compartiendo una imagen y el o la estudiante que la ve no tiene acceso al archivo, la interpretación del arrastre está condicionada por los movimientos que realiza la persona que los está llevando a cabo.

Resulta relevante entonces distinguir la noción de *arrastre* de la idea de *comportamiento.* Consideramos que el arrastre es un proceso que pone en evidencia algunas relaciones y no otras, ya que depende de la manera en que el usuario realice el movimiento –hemos desarrollado este aspecto en Arias *et al.* (2022)–; en cambio, el *comportamiento* es un atributo de la construcción realizada. En este sentido, queda definido por el conjunto de todas las propiedades puestas en juego en la construcción y se evidencia a partir de todos los arrastres posibles.

REFERENCIAS

Acosta, M. E. (2008). *Démarche expérimentale, validation, et ostensifs informatisés. Implications dans la formation d'enseignants à l'utilisation de cabri en classe de géométrie* [Tesis doctoral, Université Joseph-Fourier].

Acosta, M. E., Monroy Blanco, L. A. y Rueda Gómez, K. L. (2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. *Revista Integración, Temas de matemáticas*, *28*(2), 173-189.

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, (5), 15-25.

Arias, D., Grimaldi, V., Itzcovich, H., Murúa, R. y Segal, S. (2022). El arrastre en un programa de geometría dinámica. Su dominio de validez como asunto de interacción entre estudiantes y docentes. *Revista de Educación Matemática*, *37*(1), 7-30. https://doi.org/10.33044/revem.37472

Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y. y Mante, M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège. Une suite de situations permettant l'appropriation des règles du débat mathématique.* Presses Universitaires de Lyon.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, *34*(3), 66-72.

Berthelot, R. y Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* [Tesis doctoral, Université Bordeaux I].

Capponi, B. (2000). De la géométrie de traitement aux constructions dans Cabri - géomètre ii au college. *REPERES – IREM*, (40).

Castiblanco Paiba, A., Urquina Llanos, H., Camargo Uribe, L. y Acosta Gampeler, M. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. Incorporación de nuevas Tecnologías al currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia.* Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media, Ministerio de Educación Nacional. https://redaprende.colombiaaprende.edu.co/recursos/colecciones/JZPWO3YPGHZ/50A1CZOD5QS/3494

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp.101-120). Grupo Editorial Iberoamérica.

Fregona, D. (1995). *Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transpositions didactiques* [Tesis doctoral, Université de Bordeaux I].

Gómes, A. (1999). *Developpement Conceptuel Consecutif à L'activité Instrumentée - L'utilisation d'un système de géométrie dynamique au collège* [Tesis doctoral, Université Paris V-René Descartes].

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: interactions with robust and soft Cabri constructions. *Actas de PME*, *24*(1), 103-117.

Itzcovich, H. (s/f). *La geometría dinámica como medio de problematización de la enseñanza de la geometría en la escuela primaria* [Tesis doctoral en preparación, Facultad de Filosofía y Letras, UBA].

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría*. El Zorzal.

Itzcovich, H. y Murúa, R. (2018). GeoGebra: «nuevas» preguntas sobre «viejas» tareas. *Yupana*, (10), 71-85. https://doi.org/10.14409/yu.v0i10.7698

Itzcovich H. y Murúa, R (2022a). Primeros contactos de un grupo de docentes de escuela primaria con GeoGebra: tensiones entre conocimientos geométricos y el uso del programa. *Revista de Educación Matemática* (México), *34*(3), 329-351. https://doi.org/10.24844/EM3403.12

Itzcovich, H. y Murúa, R. (coords.) (2022b). *La enseñanza de la geometría: primeras experiencias con GeoGebra*. UNIPE: Editorial Universitaria.

Laborde C. (1995). Designing Tasks for Learning Geometry in a Computer-based Environment. The Case of Cabri-géomètre. En L. Burton y B. Jaworski (eds.), *Technology in Mathematics Teaching: a Bridge between Teaching and Learning* (pp. 35-68). Chartwell-Bratt.

Laborde, C. (1997). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig (ed.), *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática* (pp. 33-49). Grupo Editorial Iberoamérica.

Laborde, C. y Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *14*(1.2), 165-210.

Murúa, R. (2025). *Conocimientos geométricos y didácticos producidos en el marco de una instancia formativa sobre la enseñanza de la geometría mediada por el programa GeoGebra dirigida a maestras y maestros. Estudio de un caso* [Tesis doctoral, Facultad de Filosofía y Letras, UBA.]

Ng, O. L. (2014). The interplay between language, gestures, dragging and diagrams in bilingual learners' mathematical communication. *Actas de PME*, *38*(4), 289-296.

Olivero, F. (2003). *The Proving Process within a Dynamic Geometry Environment* [Tesis doctoral, University of Bristol].

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "Seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, (19), 79-92. https://doi.org/10.1007/BF00428386

Perrin-Glorian, M. J. y Godin, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école*, (222), 26-36.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colins.

Restrepo, A. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en Géométrie Dynamique chez des élèves de 6ème* [Tesis doctoral, Université Joseph-Fourier -Grenoble I].

Sadovsky, P., Parra, C., Itzcovich, H. y Broitman, C. (1998). *Matemática. Documento de trabajo nº 5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo*. Dirección de Currícula de la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Sadovsky, P. (2003). *Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas* [Tesis doctoral, Facultad de Filosofía y Letras, UBA].

Sautu, R (2005). *Todo es teoría: objetivos y métodos de investigación*. Lumière

Sessa, C., Borsani, V., Di Rico E. y Cedrón, M. (2022). *Notas sobre Laborde*. Documento de uso interno para el seminario de Geometría dictado en la UNIPE.

Soury-Lavergne, S. (2011). De l'intérêt des constructions molles en géométrie dynamique. *MathémaTICE*, (27), pp. 1-17.

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Morata.

Talmon, V. y Yerushalmy, M. (2004). Understanding Dynamic Behavior: Parent-Child Relations in Dynamic Geometry Environments. *Educational Studies in Mathematics*, (57), 91-119.

Trouche, L. (2003). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations*. Edition de l'IREM.

Recepción: 05/08/2025
Aceptación: 13/10/2025